

*Studentská tvůrčí a odborná činnost*  
**STOČ 2011**

**SROVNÁNÍ RACIONÁLNÍCH APROXIMACÍ SYSTÉMŮ SE  
ZPOŽDĚNÍMI**

**Eva Kurečková**

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, Nad Stráněmi  
4511, 760 05 Zlín, Česká republika

**5. května 2011**  
VŠB-TU v Ostravě

**Klíčová slova:** systémy se zpožděními, aproximace

**Anotace:** Smyslem práce bylo získat srovnání různých metod racionálních aproximací systémů se zpožděním, a to jak pro systémy s dopravním zpožděním, tak i pro systémy s vnitřním zpožděním označované jako anizochronní systémy. Metody aproximace byly posuzovány zejména podle přesnosti aproximace, ale také podle vhodnosti použití v inženýrské oblasti. Pro určení přesnosti aproximace byly použity normy  $H_2$  a  $H_\infty$ , které jsou v praxi nejrozšířenější. Výsledkem je program v prostředí Matlab, který po zadání libovolného systému se zpožděním zobrazí číselné a grafické srovnání přesnosti zvolených metod aproximace.

## Obsah

1.	Úvod.....	4
2.	Zadání práce.....	4
3.	Systémy se zpožděním.....	4
4.	Metody racionálních aproximací .....	5
4.1	Padého aproximace .....	5
4.2	Aproximace pomocí operátoru posunu .....	5
4.3	Fourierova analýza.....	6
5.	Normy $H_\infty$ a $H_2$ .....	6
5.1	Norma $H_\infty$ .....	6
5.2	Norma $H_2$ .....	6
6.	Program v prostředí Matlab .....	7
7.	Závěr .....	9
	Literatura .....	10

## 1. Úvod

Ráda bych poděkovala panu Ing. Liboru Pekařovi, vedoucímu předložené práce, za zajímavý námět práce, za uvedení do problematiky a za pomoc při řešení problémů.

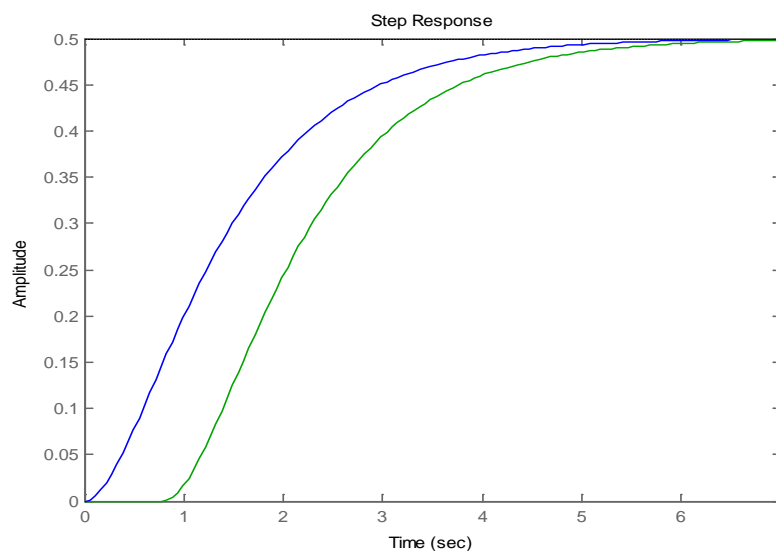
Téma práce jsem si zvolila také jako bakalářskou práci především kvůli zájmu o oblast automatizace a řízení, které se chci věnovat při dalším studiu. S radostí jsem přijala možnost působení jako pomocná vědecká síla a možnost představit svou práci v rámci Studentské tvůrčí a odborné činnosti.

## 2. Zadání práce

Náplní mé práce bylo nastudovat a porovnat metody racionálních aproximací a zvážit vhodnost jejich použití v inženýrské praxi. Výsledkem práce je program v prostředí Matlab, který umožňuje zadávání libovolných systémů se zpožděním, výběr z inženýrsky vhodných metod aproximace, volbu řádu příslušné aproximace a normu, pomocí které bude vypočítána přesnost vybraných aproximací. Číselné výsledky jsou přehledně znázorněny tabulkou. Navíc je k dispozici tlačítko pro zobrazení amplitudových frekvenčních charakteristik, pro možnost grafického porovnání.

## 3. Systémy se zpožděním

Systémy se zpožděním se zabývá především studium technologických procesů, kde se zpoždění vyskytuje při přenosu hmoty či energie. Fenomén zpoždění je však možno nalézt i v jiných oblastech, např. v biologii, sociologii, ekonomice. Teorie řízení se systémy se zpožděním zabývá již dlouhou dobu, avšak převážná většina prací je zaměřena pouze na systémy s dopravním zpožděním, které je chápáno jako časová prodleva potřebná k přenosu energie či hmoty. Vliv zpoždění se však uplatňuje i ve vnitřní struktuře regulačního obvodu. Pro takovéto systémy získáváme složitější matematický popis – zpoždění se vyskytuje ve jmenovateli přenosové funkce.[6]



**Obrázek 1 - Přejchodová charakteristika systému se zpožděním**

#### 4. Metody racionálních aproximací

Uvádím metody aproximace, které byly vyhodnoceny jako inženýrsky vhodné. Hlavním kritériem výběru byla náročnost na matematický aparát. Jednou z vyloučených metod byla např. metoda označovaná jako Fourier-Laguerrova aproximace.

##### 4.1 Padého aproximace

Padého aproximaci lze zařadit mezi nejoblíbenější a nejčastěji používané metody aproximace systémů se zpožděními. Metodu objevil francouzský matematik Henry Padé. [2],[3]

Základním vztahem pro určení aproximace členu zpoždění  $e^{-sT}$  je spojení následujících dvou vztahů.

$$e^{-sT} = \frac{P(-s)}{P(s)}, \quad P(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{(2n)!} s^k$$

V literatuře se setkáváme i se zjednodušenou verzí nazývanou diagonální Padého aproximace:

$$e^{-sT} = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{(2n-l)! (-Ts)^l}{l!(n-l)!}}{\sum_{l=0}^n \frac{(2n-l)! (Ts)^l}{l!(n-l)!}}$$

##### 4.2 Aproximace pomocí operátoru posunu

Do této skupiny aproximací, založené na skutečnosti, že člen zpoždění  $e^{-sT}$  je operátorem posunutí, jsem zahrnula Laguerrov posun, Kautzův posun a Padého posun. Použití těchto aproximací je vhodné u nestabilních systémů, kde dosahují nejlepších výsledků ve srovnání s jinými metodami.[4]

- Laguerrov posun

$$e^{-sT} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{2n}}{1 + \frac{Ts}{2n}} \right)^n$$

- Kautzův posun

$$e^{-sT} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{2n} + \frac{T^2 s^2}{8n^2}}{1 + \frac{Ts}{2n} + \frac{T^2 s^2}{8n^2}} \right)^n$$

- Padého posun

$$e^{-sT} = \left( \frac{1 - \frac{Ts}{2n} + \frac{T^2 s^2}{12n^2}}{1 + \frac{Ts}{2n} + \frac{T^2 s^2}{12n^2}} \right)^n$$

### 4.3 Fourierova analýza

Tento způsob aproximace je odvozen ze systému se zpětnou vazbou, aplikací Fourierovy analýzy na odezvu systému na přechodovou funkci. Touto metodou byla získána nejprve aproximace celého přenosu  $G(s)$  a odtud byla získána aproximace členu  $e^{-sT}$  [5]. Výsledný vztah pro zápornou zpětnou vazbu je dán následujícími vzorci:

$$e^{-sT} = \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

$$W(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}Ts + \frac{2}{\pi^2}T^3s^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 s^2 T^2 + (2n+1)\pi^2}$$

## 5. Normy $H_{\infty}$ a $H_2$

Pro určení tzv. nestrukturované neurčitosti používáme normy. V tomto případě byly použity normy pro přenosy. Jelikož se norma  $H_1$  téměř nepoužívá, uvedu normy  $H_2$  a  $H_{\infty}$ .

### 5.1 Norma $H_{\infty}$

Norma  $H_{\infty}$  je supremum amplitudové frekvenční charakteristiky. Velký význam má v teorii robustního řízení.

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

### 5.2 Norma $H_2$

Tato norma se označuje také jako kvadratická norma. Má význam energie. Norma  $H_2$  je konečná, tehdy a jen tehdy, když  $G(s)$  je striktně ryzí a nemá žádný pól na imaginární ose [1].

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}$$

## 6. Program v prostředí Matlab

Výsledkem mé práce je program v prostředí Matlab pro porovnání vybraných metod aproximace. Pro tento program jsem vytvořila grafické rozhraní znázorněné na obrázku:

The screenshot shows a MATLAB GUI window titled 'prvni'. The main area is yellow and contains the text 'Popis systému' and 'G(s) ='. Below this are two input fields: 'Zadejte čítele' (numerator) and 'Zadejte jmenovatel' (denominator). Below the input fields are two columns of options. The first column is 'Metody aproximace:' with checkboxes for 'Padého aproximace', 'Laguerrův posun', 'Kautzův posun', 'Padého posun', and 'Fourierova analýza'. The second column is 'Řád aproximace:' with 'n =' and an input field for each method. The third column is 'Norma pro určení přesnosti aproximace:' with checkboxes for 'Hinf' and 'H2'. At the bottom is a button labeled 'Určit přesnost aproximace'.

Obrázek 2 - Základní grafické rozhraní programu

V horní části okna se nachází žlutě vyznačený prostor pro zadání parametrů systému, který chceme aproximovat. Těmito parametry jsou čítelel a jmenovatel přenosové funkce  $G(s)$ . Čítelel i jmenovatel můžeme zadávat v libovolném tvaru, např.  $s^2 + 4*s + 6.1$  nebo  $(s + 2)*(s + 3.4)$ . Pro násobení použijte hvězdičku a místo desetinné čárky tečku, jak je obvyklé při práci v prostředí Matlab. Člen zpoždění zadávejte ve tvaru exponenciální funkce, např.  $\exp(-0.1*s)$ .

V prostřední části můžeme zvolit libovolný počet metod aproximace, které mají být porovnány a ke každé metodě příslušný řád aproximace. Poslední volbou je norma pro určení přesnosti aproximace, norma  $H_\infty$ ,  $H_2$  nebo obě normy.

Po stisknutí tlačítka se zobrazí tabulka výsledků a možnost zobrazení frekvenčních charakteristik původního a aproximovaných systémů.

první

**Popis systému**

$$G(s) = \frac{\exp(-0.1 \cdot s)}{s + \exp(-3 \cdot s)}$$

**Metody aproximace:**

Padého aproximace

Laguerrův posun

Kautzův posun

Padého posun

Fourierova analýza

**Rád aproximace:**

n =

n =

n =

n =

n =

**Norma pro určení přesnosti aproximace:**

Hinf

H2

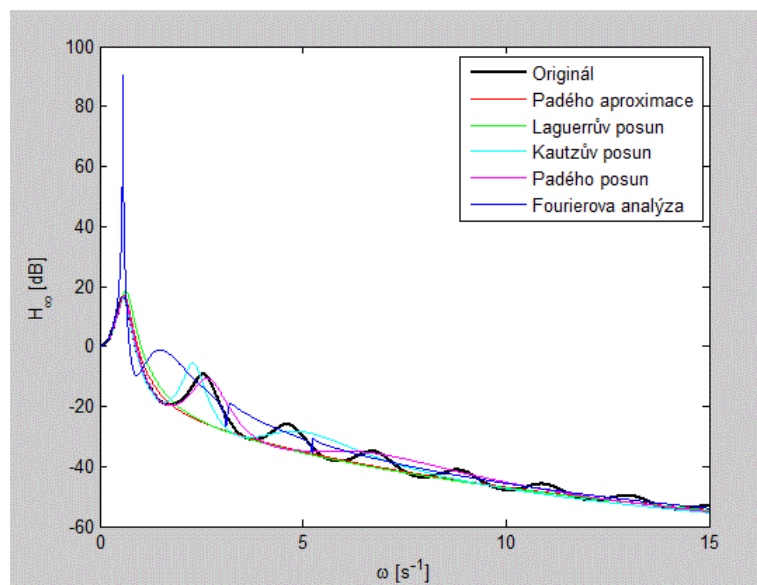
Určit přesnost aproximace

	Hinf	H2
Padého aprox.	3.6202	3.1651
Laguerrův posun	3.9594	3.4346
Kautzův posun	3.4489	3.1024
Padého posun	3.5392	3.0318
Fourierova analýza	91.5708	11.3635

Vykresli frekvenční charakterisky

Obrázek 3 - Vzorové vyplnění požadavků na aproximace, tabulka výsledků

Po stisku tlačítka *Vykresli frekvenční charakteristiky* se objeví další okno, sloužící pro vykreslení grafů amplitudové frekvenční charakteristiky. Charakteristika původního systému je znázorněna černě.



Obrázek 4 - Zobrazení grafů frekvenčních charakteristik



## **7. Závěr**

Z různých metod racionálních aproximací byly zvoleny Padého aproximace, skupina aproximací nazvaných aproximace operátoru posunu a aproximace s využitím Fourierovy analýzy. Tyto metody jsou vhodné zejména pro jednoduchost programové implementace, jak jsem si ověřila při tvorbě aplikace. Jedinečnost práce spočívá především v univerzálnosti použití pro různé systémy se zpožděními.

Z důvodu omezení počtu stran jsem v teoretické části uvedla především výsledky studia jednotlivých metod, které jsem později přímo použila pro tvorbu programu. V části práce, která pojednává o aplikaci, jsem se zaměřila na vysvětlení práce s programem.

Dalším krokem bude srovnání použitých metod aproximace pro regulátory navržené algebraickou metodou pro vybrané modely řízených anizochronních systémů.

## **Literatura**

- [1] DOSTÁL, P., MATUŠŮ, R.: Stavová a algebraická teorie řízení, Fakulta aplikované informatiky, UTB ve Zlíně, 2010.
- [2] PARTINGTON, J.: Some frequency-domain approaches to the model reduction of delay systems. *Annual reviews in control*. 2004.
- [3] RICHARD, J.: Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*. 2003.
- [4] MÄKILLÄ, P., PARTINGTON, J.: Laguerre and Kautz shift approximations of delay systems. *International Journal of Control*. 1999.
- [5] BATLLE, C., MIRALLES, A.: On the approximation of delay elements by feedback. *Automatica*. 2000.
- [6] PEKAŘ, L., PROKOP, R.: A simple stabilization and algebraic control design of unstable delayed systems using meromorphic functions. In: *Proceedings of the 26th IASTED International Conference MIC 2007, Innsbruck, Austria, 2007*.