VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

Navrhování signálních plánů křižovatek metodami lineárního programování

Design of Signal Plans for Crossroads Using Linear Programming Methods

Student: Bc. Lukáš Krejčí

Vedoucí práce: Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Ostrava 2011

Obsah

1. Úvod 2

2. Formulace problému 2

3. Obecná charakteristika metod 3

3.1. Dekompoziční přístup 3

3.2. Exaktní přístup 4

4. Teoretická východiska řešení - zhodnocení existujících lineárních modelů 5

4.1. Návrh úpravy modelů ze třetí podúlohy dekompozičního přístupu 5

5. Zhodnocení výsledků realizovaných experimentů 7

5.1. Modely minimalizující délku cyklu 7

5.2. Modely maximalizující minimální poměrnou rezervu 8

5.3. Model minimalizující součet délek řad čekajících vozidel 9

5.4. Model s vícekriteriální optimalizovanou funkcí 9

6. Závěr 10

Seznam použité literatury 11

1. Úvod

Doprava ve všech vyspělých zemích výrazně ovlivňuje ekonomiku v celém státě i mnoho dalších faktorů. Jedním z významných prvků, který omezuje silniční sítě, jsou křižovatky, a proto v případě světelně řízených křižovatek je potřeba hledat jejich optimální řízení. Pevné signální plány jsou v dnešní době tvořeny na základě platné legislativy metodou saturovaného toku, metodou spotřeby času nebo iterační metodou. Jistou alternativu dnes nabízí obor operační výzkum, kde v odvětví lineárního programování již existují modely resp. ucelené postupy pro tvorbu signálních plánů. První a historicky dříve vzniklou variantou je tzv. dekompoziční přístup, který rozkládá celou úlohu sestrojení signálního plánu na několik jednodušších podúloh. Druhou variantou je tzv. exaktní přístup, jehož model je založený na celočíselném lineárním programování.

Předložená práce je zaměřená na porovnání výše uvedených výpočetních metod lineárního programování z hlediska dosažených výsledků i časové náročnosti pro řešitele. Snaha bude též zaměřena na nalezení efektivnějších způsobů zpracovávání dat pro dekompoziční přístup.

2. Formulace problému

Křižovatka vybavená světelným signalizačním zařízením řídí dopravní proudy $P_1,\dots,P_n$ drážních vozidel, silničních vozidel, resp. chodců, které charakterizuje jejich vstupní intenzita $q_1,\dots,q_n$ $[j.v. \cdot hod^{-1}]$ a trasa v ploše dané křižovatky. Proudy, jejichž trasy se neprotínají, mohou vstupovat do křižovatky ve stejný okamžik. U těchto tzv. nekolizních proudů totiž nehrozí vzájemný střed dvou vozidel nebo vozidla a chodce. Proudy, jejichž trasy se vzájemně protínají, do křižovatky zpravidla vstupovat současně nesmějí. Jedná se o tzv. kolizní proudy, u nichž hrozí vzájemný střet vozidel nebo vozidla a chodce. Výjimku tvoří tzv. podmíněně kolizní proudy, což jsou proudy, jejichž trasy se sice vzájemně protínají, ale současně pro ně platí i při řízení světelným signalizačním zařízením příslušná pravidla provozu na pozemních komunikacích o přednosti v jízdě. Pro všechny dvojice vzájemně kolizních dopravních proudů je vypočten mezičas.

Řídícím prvkem celé křižovatky je řadič, který se řídí signálním plánem. Ten obsahuje pořadí a dobu rozsvícení jednotlivých světelných signálů. Návrh signálního plánu pro řízení světelného signalizačního zařízení křižovatky lze uskutečnit pomocí dvou přístupů, které se zakládají na možnostech lineárního programování. Jedním je dekompoziční přístup a druhý přístup se nazývá exaktní.

Výpočetní experimenty budou realizovány na reálné ostravské křižovatce ulic 28. října, Mariánskohorská a Plzeňská, která patří k nejzatíženějším křižovatkám v kraji. Pro řešení úloh lineárního programování bude použit software FICO Xpress Optimization.

3. Obecná charakteristika metod

3.1. Dekompoziční přístup

Tento postup pro návrh signální plánu křižovatky popsal prof. RNDr. Jan Černý, DrSc., Dr.h.c. v [1]. Vzhledem k omezeným možnostem výpočetní techniky dřívější doby bylo nutné úlohu rozdělit na tři oddělené podúlohy.

V první podúloze je zapotřebí množinu proudů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vyskytujících se na řešené křižovatce pokrýt minimální soustavou maximálních podmnožin vzájemně nekolizních proudů, tzn. vyhledat fáze. Tato podúloha je řešena ve dvou krocích. V prvním kroku se na základě poznatků z teorie grafů vyhledá soustava všech maximálních podmnožin nekolizních proudů. Pro tento účel se vytvoří graf bezkoliznosti, ve kterém jsou dopravní proudy křižovatky převedeny na množinu vrcholů grafu a vztahy bezkoliznosti, resp. podmíněné kolikosti dopravních proudů znázorňují hrany grafu. Dvojice vzájemně kolizních proudů jsou ponechány bez spojující hrany. Úkolem je v tomto grafu nalézt všechny maximálně kompletní podgrafy, tedy takové podgrafy, které obsahují vrcholy spojené hranou se všemi ostatními vrcholy, a zároveň již nelze do tohoto podgrafu dodat žádný další vrchol, který by tuto podmínku splňoval. Po vyhledání všech fází, podle postupu v prvním kroku, je úkolem druhého kroku vybrat minimální počet fází. Jedinou podmínkou tohoto kroku je, aby každý dopravní proud vstupující do křižovatky byl obsažen alespoň v jedné z vybraných fází. K tomuto účelu byl sestaven jednoduchý model lineárního programování.

Cílem druhé podúlohy je optimální seřazení vybraných fází. Optimalizačním kritériem je součet rozhodujících mezičasů mezi fázemi. Toto kritérium je potřeba minimalizovat, čímž se minimalizuje i součet neproduktivního času křižovatky. K vyřešení této podúlohy lze použít Littleův algoritmus pro vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice v obyčejném digrafu. Tento graf obsahuje vrcholy představující vybrané fáze z předchozí podúlohy, hrany představující přechody mezi fázemi a ohodnocení hran hodnotou, která odpovídá rozhodujícímu mezičasu mezi fázemi. Výstupem této podúlohy je fixace poloh fází, tedy i zelených, pro jednotlivé proudy vůči ostatním.

Třetí podúloha stanovuje optimální časy začátků a konců zelených v průběhu cyklu pro všechny proudy s ohledem na jejich zafixovanou polohu z předchozí podúlohy. Tento úkol je řešen pomocí modelu lineárního programování se zvoleným optimalizačním kritériem. Model obsahuje dvě základní množiny proměnných, které mohou být jak celočíselné, tak i z oboru nezáporných reálných hodnot. Tyto proměnné představují časy začátků a konců dob zelených pro jednotlivé proudy. Další proměnná se volí dle použitého optimalizačního kritéria. Může jí být buď délka cyklu, nebo minimální poměrná rezerva. Optimalizační kritérium délka cyklu model minimalizuje. Rozhodujícím dopravním proudům ve fázích jsou zde přiřazeny pouze minimální doby zelených pro průjezd zadané intenzity vozidel. Při zvolené délce cyklu lze za optimalizační kritérium zvolit minimální poměrnou rezervu, která model maximalizuje. Dalším přípustným kritériem může být součet délky čekajících vozidel, který se minimalizuje a u něhož je také nutné zvolit délku cyklu. Model umožňuje i výpočet podle vhodně zvolené vícekriteriální účelové funkce.

3.2. Exaktní přístup

Tento přístup popsal Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc. v [4]. Oproti předchozímu přístupu se skládá pouze z jediného kroku, kterým je model celočíselného lineárního programování značného rozsahu.

Model obsahuje dvě základní množiny proměnných pro modelování časů začátků a konců dob zelených jednotlivých proudů i proměnnou podle zvoleného optimalizačního kritéria stejně jako model třetí podúlohy předchozího přístupu. Odlišnost v oblasti proměnných spočívá v tom, že model obsahuje ještě další dvě množiny bivalentních proměnných. První množina modeluje pozici začátků a konců zelených pro jednotlivé proudy, tedy zda mají přirozenou pozici, kdy hodnota začátku zelené je nižší než hodnota konce zelené, nebo zda mají inverzní pozici, kdy hodnota začátku zelené je vyšší než hodnota konce zelené, což představuje pozici zelené na rozhraní dvou cyklu. Obdobnou filozofii má i druhá množina bivalentních proměnných, která však nemodeluje pozici zelené, ale pozici mezičasu všech dvojic kolizních proudů. I zde je možné použit pro účelovou funkci různá optimalizační kritéria, a to při žádných nebo jen velmi malých opravách podmínek modelu.

4. Teoretická východiska řešení - zhodnocení existujících lineárních modelů

Dekompoziční přístup je při řešení rozsáhlých křižovatek pro řešitele velmi časově náročný. Každá ze tří podúloh vyžaduje rozsáhlou přípravu před použitím nástroje vyhledávajícího řešení. Mnohdy tyto přípravné kroky vyžadují od řešitele plnou soustředěnost, aby se předešlo vzniku chyby. Modely lineárního programování naopak nepředstavují pro možnosti dnešní výpočetní techniky žádný složitý úkol a jejich optimální řešení je ve všech případech nalezeno do jedné sekundy.

Exaktní přístup nevyžaduje od řešitele takové množství času na přípravu modelu. Časově náročný je výpočet modelu. V některých případech model nalezl optimální řešení do několika sekund, obvykle výpočet trval několik minut a u některých modelů ani po dvanáctihodinovém výpočtu nebylo nalezeno optimální řešení. Konkrétní hodnoty budou zhodnoceny níže.

Dá se očekávat, že kvalita řešení obou modelů je na podobné úrovni. Jistou nevýhodu má dekompoziční přístup, který fixuje pořadí fází a také neumožňuje umístění zelené na rozhraní fází. Oba zmíněné nedostatky se ovšem vždy nemusí na výsledném řešení projevit.

4.1. Návrh úpravy modelů ze třetí podúlohy dekompozičního přístupu

Jedním z časově náročných kroků pro řešitele je sestavení dvou množin podmínek zajišťujících dodržení mezičasů v modelech ze třetí podúlohy. Je totiž zapotřebí rozhodnout u každého mezičasu z tabulky mezičasů, do které z množin podmínek patří. Toto rozhodnutí se provádí v závislosti na poloze proudů ve fázovém schématu. V podmínkách křižovatky, na kterou se práce vztahuje, to představuje 284 rozhodnutí. Tento úkol může znamenat až několik hodin práce.

K úspoře času a snížení pravděpodobnosti vzniku chyby vede nahrazení zmíněných skupin podmínek následujícími podmínkami:

$$x_j - y_i \geq mf_{ij} \qquad pro\ \mathrm{i} \in I, j \in I\ , mf_{ij} \geq 0 \qquad (1)$$

$$x_j - y_i \geq mc_{ij} - c \qquad pro\ \mathrm{i} \in I, j \in I, mc_{ij} \geq 0 \qquad (2)$$

Ve skupinách podmínek (1) a (2) se vyskytují nové symboly, jsou jimi mf_{ij} a mc_{ij}, které představují prvky matic obsahujících mezičasy. Matice MF s prvky mf_{ij} obsahuje pouze takové mezičasy, které probíhají v průběhu cyklu, tedy v případě, kdy platí $y_i < x_j$. Naopak matice MC s prvky mc_{ij} obsahuje pouze takové mezičasy, které probíhají na rozmezí dvou po sobě následujících cyklů, tedy v případě, kdy platí $y_i > x_j$.

Vytvoření uvedených matic lze při dobré znalosti možností libovolného tabulkového editoru dosáhnout následujícím postupem:

1) kompletní tabulka mezičasů je rozdělena na takový počet nových tabulek, který odpovídá počtu navržených fází v první podúloze. Každá z těchto tabulek obsahuje pouze takové řádky, jenž představují proudy obsažené ve fázi, kterou tabulka reprezentuje.
2) Tabulky jsou chronologicky seřazeny za sebou v pořadí, jaké bylo navrženo ve druhé podúloze.
3) V každé tabulce jsou barevně zvýrazněny právě takové sloupce představující proudy křižovatky, které již byly obsaženy v předchozích fázích, tedy se vyskytují v předchozích tabulkách v řádcích.
4) Tyto tabulky jsou zpětně seskupeny do podoby jediné tabulky mezičasů, a to při zachování obvyklého pořadí proudů. Tato tabulka bude představovat matici MF.
5) Nově vzniklá tabulka z kroku 4) je duplikována a bude představovat matici MC.
6) V tabulce představující matici MF z kroku 4) jsou za pomocí vyhledávacích funkcí použitého software vymazány hodnoty všech barevně zvýrazněných buněk.
7) V tabulce představující matici MC z kroku 5) jsou za pomocí vyhledávacích funkcí použitého software vymazány hodnoty všech nezvýrazněných buněk.
8) V obou tabulkách jsou všechny prázdné buňky nahrazeny libovolně velkým záporným číslem.

Uvedený postup tvorby nových matic mezičasů je časově výhodný jen u křižovatek většího počtu proudu, kde může úspora času dosahovat několika desítek minut. Přínos této modifikace podmínek však spočívá hlavně ve snížení rizika vzniku chyby.

5. Zhodnocení výsledků realizovaných experimentů

Výpočetní experimenty v podmínkách uvedené křižovatky probíhaly v několika krocích.

Před přikročením k výpočtům pomocí popisovaných přístupů bylo nutné zajistit vstupní údaje charakteristické pro konkrétní křižovatku. Byla pořízena kompletní tabulka mezičasů a situační schéma. Hodnoty intenzity dopravy pro všechny vstupující proudy byly převzaty z [5]. Jedná se o údaje pořízené dopravním průzkumem uskutečněným dne 24. 11. 2008 v době dopravní špičky od 7:00 do 8:00.

U dekompozičního přístupu byly nejdříve provedeny první dvě podúlohy, jimiž se dospělo k seřazení čtyř vybraných fází, které obsahují každý dopravní proud minimálně jednou. Ve zvoleném tabulkovém editoru byly vytvořeny matice MC a MF podle postupu popsaného v předchozí kapitole. V posledním kroku byl sepsán text programu pro software Xpress-IVE, kterým bylo možno vypočítat signální plán pomocí všech zmíněných modelů.

V případě dekompozičního přístupu byl pouze sepsán text programu pro software Xpress-IVE, který taktéž umožňoval výpočet podle všech zmíněných optimalizačních kritérii.

Ve všech případech bylo přistoupeno k výpočtu modelů pro proměnné představující začátky a konce dob zelených z oboru hodnot nezáporných reálných čísel i z oboru hodnot nezáporných celých čísel.

5.1. Modely minimalizující délku cyklu

Před výpočtem těchto modelů je možné zvolit hodnotu minimální poměrné rezervy u. Cílem experimentu bylo dosažení minimální délky cyklu pouze pro zadané hodnoty intenzit dopravy a byl kladen požadavek na vytvoření rezervy, tedy byla zvolena hodnota $u = 1$.

Model umožňující výpočet minimální délky cyklu v exaktním přístupu obsahuje prohibitivní konstantu K, kterou je v [4] doporučeno volit větší, než je hodnota představující 1 hodinu, tedy 3600. Byla provedena série experimentů s různou hodnotou této konstanty. Hodnota účelové funkce ve všech případech byla shodná, rozdíl byl však ve výpočetní době. Závislost hodnoty konstanty K na výpočetním čase je možno si představit podle hodnot uvedených v Tab. č. 1.

Tab. č. 1

Hodnota konstanty K	Výpočetní čas [s]	
	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných reálných čísel	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných celých čísel
100	13,6	11,6
1000	18,0	39,8
10000	62,9	50,0
100000	92,7	60,9

Hodnoty účelové funkce jsou v absolutní shodě, oba přístupy dospěly ke stejné délce minimálního cyklu. Hodnoty jsou shrnuty v Tab. č. 2.

Tab. č. 2

	Hodnota účelové funkce – minimální délka cyklu [s]	
	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných reálných čísel	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných celých čísel
Dekompoziční přístup	80,821	85
Exaktní přístup	80,821	85

5.2. Modely maximalizující minimální poměrnou rezervu

Před výpočtem všech následujících modelů musí řešitel zvolit délku cyklu, pro kterou bude výpočet prováděn. Byla zvolena maximální možná doporučována délka cyklu podle lit. [2] o hodnotě 120s.

Při těchto výpočtech nebylo dosaženo stejných výsledků, v obou případech model z exaktního přístupu došel k lepší hodnotě účelové funkce. Konkrétní hodnoty účelové funkce jsou v Tab. č. 3.

Tab. č. 3

	Hodnota účelové funkce – minimální poměrná rezerva [-]	
	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných reálných čísel	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných celých čísel
Dekompoziční přístup	1,06840	1,06195
Exaktní přístup	1,08856	1,07706

5.3. Model minimalizující součet délek řad čekajících vozidel

I v tomto případě modely vykazují rozdílné výsledky účelové funkce. V tomto případě se optimalizační kritérium minimalizovalo, tedy model exaktního přístupu dospěl k lepšímu výsledku. Hodnoty jsou uvedše v Tab. č. 4.

Tab. č. 4

	Hodnota účelové funkce – součet délek řad čekajících vozidel [j.v.]	
	Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných reálných čísel	**Proměnné x_i a y_i z oboru hodnot nezáporných celých čísel**
Dekompoziční přístup	240 415	240 535
Exaktní přístup	231 598	232 051

5.4. Model s vícekriteriální optimalizovanou funkcí

Toto optimalizační kritérium bylo sestaveno ze dvou členů. Prvním členem je minimální poměrná rezerva, jejíž hodnota je $K -$ násobně navýšena, čímž je umožněno preferovat právě tento člen při optimalizaci. Druhým členem je počet jednotkových vozidel, která v průměru přijedou ke křižovatce v době červené.

Model exaktního přístupu, jehož proměnné, představující začátky a konce dob zelených, byly z oboru hodnot nezáporných celých čísel, nedospěl ani v jednom případě za dobu 12 hodin výpočetního času k optimálnímu výsledku.

Odhad vlivu hodnoty prohibitivní konstanty K byl součástí výpočetních experimentů. Vliv na hodnoty členů účelové funkce nebyl nalezen, vždy dosahovaly stejných hodnot, rozdílný byl však výpočetní čas u modelu z exaktního přístupu. Hodnoty jsou shrnuty v Tab. č. 5.

Tab. č. 5

Hodnota konstanty K	Výpočetní čas [s]
100 000	274,7
1 000 000	92,7
10 00 000	57,1
100 000 000	2,0
1 000 000 000	3,8
10 000 000 000	7,6

Pro prezentaci výsledků byl vybrán model s nejkratším výpočetním časem, tedy model s hodnotou $K = 10^8$. U v tomto případě model exaktního přístupu došel k lepším výsledků, které jsou shrnuty v Tab. č. 6.

Tab. č. 6

	Dekompoziční přístup	**Exaktní přístup**
Hodnota účelové funkce [-]	$1{,}06599 \cdot 10^8$	$1{,}08761 \cdot 10^8$
Minimální poměrná rezerva [-]	1,06840	1,08856
Součet délek řad čekajících vozidel [j.v.]	241 051	95 439

6. Závěr

Srovnání exaktního a dekompozičního přístupu lze provést na více úrovních. Prvním je samozřejmě kvalita výsledků. Zde exaktní přístup nedosáhnul nikdy horšího výsledku, než přístup dekompoziční. V případě vyhledání minimální délky cyklu dosáhly oba přístupy stejného výsledku, v ostatních případě exaktní přístup měl výsledek vždy lepší.

Jde-li o potřebný čas k jednomu výpočtu, tak v případě takto rozsáhlé křižovatky je jednoznačně méně náročný exaktní přístup. I přes snahu o nalezení efektivnějšího způsobu zpracování dat u dekompozičního přístupu, kterým bylo dosaženo úspory několika desítek minut, vyžaduje celý postup stále několik hodin práce řešitele.

Má-li však řešitel potřebu výpočet opakovat třeba pro různé hodnoty délky cyklu, pak při dekompoziční přístup nevzniká již téměř žádná další prodleva. Je potřeba zopakovat výpočet jen posledního modelu a ten obvykle trvá méně než jednu sekundu. Kdežto opakovaný propočet exaktního přístupu vyžaduje mnohdy několik desítek minut v závislosti na modelu a výkonu dostupné výpočetní techniky.

Seznam použité literatury

[1] Černý, Jan; Kluvánek, Pavol. *Základy matematickej teórie dopravy*. Bratislava : Veda, 1991, 1. vydání, 280 s. ISBN 80-224-0099-8

[2] Silniční vývoj spol. s.r.o. *Navrhování světelných signalizačních zařízení pro řízení silničního provozu technické podmínky*. Brno : Centrum dopravního výzkumu Brno, 1996. 1. vydání, 109 s. ISBN 80-902141-2-6

[3] Daněk, Jan; Teichmann, Dušan. *Optimalizace dopravních procesů*. Ostrava : VŠB-TUO, 2005, 1. vydání, 191 s. ISBN 80-248-0996-6

[4] PECHTOR, Slávek. *Návrh signálneho plánu križovatky pomocou metód matematického programovania*. Žilina, 1998. 154 s. Diplomová práce. Žilinská Univerzita v Žilině.

[5] KREJČÍ, Lukáš. *Verifikace optimality stávajícího způsobu řízení vybrané světelně řízené křižovatky lineárním matematickým modelem*. Ostrava, 2009. 60 s. Bakalářská práce. VŠB – Technická univerzita Ostrava.