


# **Metoda přiřazení pólů v řízení lineárních spojitých SISO systémů**

Pole placement method in control of linear continuous-time SISO systems

Bc. Zdeněk Babík

---

STOČ  
2009

 Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

## ABSTRAKT

Práci lze rozdělit na dvě hlavní části. V první jsou ukázány postupy při návrhu regulátorů 1DOF a 2DOF, včetně problémů, které mohou při polynomiálních metodách syntézy nastat, dále je zde ukázán postup při návrhu regulátorů pro soustavy s parametry obecně nevhodnými pro regulaci (soustavy nestabilní, neminimálně fázové, s dopravním zpožděním), včetně úprav, které mohou návrh regulátoru usnadnit. V práci jsou také uvedeny obecné předpisy pro volbu stabilního charakteristického polynomu uzavřeného regulačního obvodu  $d(s)$  se zvláštním důrazem na metody LQ řízení, které je zde použito i pro jiné průběhy žádané veličiny než jsou pouze skokové funkce. V druhé části jsou pak uvedeny příklady regulačních pochodů pro různé typy soustav a různé volby polynomu  $d(s)$ .

Klíčová slova: konfigurace 1DOF, 2DOF, stabilita soustavy, fázovost soustavy, dopravní zpoždění, LQ řízení, optimální řízení

**OBSAH**

<b>1</b>	<b>POLYNOMIÁLNÍ METODY SYNTÉZY .....</b>	<b>4</b>
1.1	OBECNÉ POŽADAVKY NA SYSTÉM ŘÍZENÍ .....	4
1.2	1DOF KONFIGURACE SYSTÉMU ŘÍZENÍ.....	4
1.3	2DOF KONFIGURACE SYSTÉMU ŘÍZENÍ.....	7
<b>2</b>	<b>VOLBA CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU <math>D(S)</math> .....</b>	<b>11</b>
2.1	METODA PŘÍRAZENÍ PÓLŮ - OBECNÉ POŽADAVKY NA POLYNOM $D(S)$ .....	11
2.2	NEJČASTĚJŠÍ ZPŮSOBY VOLBY POLYNOMU $D(S)$ .....	11
2.3	OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ.....	12
<b>3</b>	<b>SYSTÉMY S VLASTNOSTMI OBECNĚ NEVHODNÝMI PRO REGULACI .....</b>	<b>16</b>
3.1	SYSTÉMY S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM.....	16
3.1.1	Aproximace dopravního zpoždění .....	16
3.2	NESTABILNÍ SYSTÉMY .....	17
3.3	SYSTÉMY S NEMINIMÁLNÍ FÁZÍ .....	17
<b>4</b>	<b>PRAKTICKÁ UKÁZKA NÁVRHU REGULÁTORŮ POLYNOMIÁLNÍ METODU .....</b>	<b>18</b>
4.1	NÁVRH REGULÁTORU 1DOF .....	18
4.2	NÁVRH REGULÁTORU 2DOF .....	21
4.3	OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ.....	22
<b>5</b>	<b>UKÁZKY REGULAČNÍCH POCHODŮ.....</b>	<b>25</b>
5.1	POUŽITÉ PROGRAMOVÉ VYBAVENÍ .....	26
5.1.1	Popis jednotlivých částí programu .....	26
5.2	ŘÍZENÍ INTEGRAČNÍCH SOUSTAV .....	28
5.3	VLIV VOLBY POLYNOMU $D(S)$ NA PRŮBĚH REGULAČNÍHO POCHODU.....	28
5.4	ŘÍZENÍ PROCESŮ S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM .....	29
5.5	PŘÍKLADY REGULACE PRO SPECIÁLNÍ TVARY ŽÁDANÉ VELIČINY.....	33
5.6	SIMULACE REGULAČNÍCH POCHODŮ PRO SOUSTAVY UVEDENÉ V KAPITOLÁCH 5.2 – 5.3. ....	34
	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>46</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>47</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>48</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>49</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>50</b>

# 1 POLYNOMIÁLNÍ METODY SYNTÉZY

## 1.1 Obecné požadavky na systém řízení

Polynomiální metody syntézy představují moderní způsob návrhu regulátoru, který se svým pojetím značně odlišuje od klasických metod syntézy (např. Ziegler-Nicholsova metoda, Naslinova metoda, apod.). Při použití klasických metod nejprve určíme konkrétní typ regulátoru (P, PI, PID) a poté podle pravidel zvolené metody spočítáme jeho parametry.

Při použití polynomiální metody syntézy však určujeme kromě parametrů regulátoru také jeho strukturu. Právě díky tomu jsme schopni relativně snadno navrhnout regulátor i pro řízení systémů nestabilních, s neminimální fází, dopravním zpožděním, popř. pro vstupní signály (žádaná hodnota a porucha) jiné než skokové funkce (rampa, harmonický signál, apod.). [1],[4],[6]

Postup při aplikaci polynomiální metody syntézy vychází ze základních požadavků na systém řízení. Tyto požadavky mohou být formulovány následovně:

- a) Stabilita systému řízení.
- b) Vnitřní ryzost systému řízení (přenosy všech jeho prvků musí být ryzí, tzn., že metoda poskytuje pouze fyzikálně realizovatelné regulátory).
- c) Asymptotické sledování referenčního signálu (žádané hodnoty výstupu)
- d) Úplná kompenzace poruchy vstupující do systému řízení.

Při polynomiálních metodách syntézy přenosy jednotlivých prvků v systému řízení (regulačním obvodu) chápeme jako podíly polynomů, resp. racionální funkce. Přenos regulované soustavy v řízeném systému budeme tedy uvažovat v následujícím tvaru:

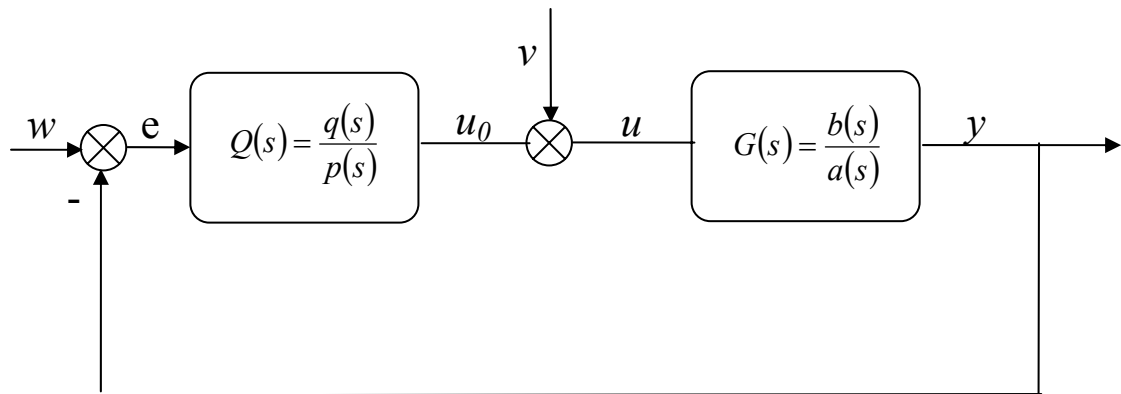
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (1)$$

kde:  $a(s)$  a  $b(s)$  představují polynomy v  $s$ . Předpokládáme, že polynomy  $a(s)$  a  $b(s)$  jsou nesoudělné a splňují podmínku ryzosti:

$$\deg b(s) < \deg a(s) \quad (2)$$

## 1.2 1DOF konfigurace systému řízení

Označení této konfigurace vzniklo z anglického *one degree of freedom* (jeden stupeň volnosti). Konfigurace vychází z klasické regulační smyčky se zpětnovazebním regulátorem. Schéma je na Obr. 1.



Obr. 1 – 1DOF konfigurace systému řízení

Přenosy v regulačním obvodu

$G(s)$  – přenos soustavy – vstupně-výstupní lineární model

$Q(s)$  – zpětnovazební regulátor

Signály působící v regulačním obvodu

$w$  - žádaná hodnota

$u_0$  – akční zásah na výstupu regulátoru

$e$  – regulační odchylka

$u$  – akční zásah působící na vstupu soustavy

$y$  – výstupní signál

$v$  – porucha na vstupu regulované soustavy

Přenos regulátoru uvažujeme ve tvaru podílu nesoudělných polynomů  $q$  a  $p$ :

$$Q(s) = \frac{U_0(s)}{E(s)} = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (3)$$

s podmínkou ryzosti (fyzikální realizovatelnosti regulátoru):

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (4)$$

Obrazy obou vstupních signálů (referenčního signálu a poruchy) můžeme rovněž chápat jako podíly polynomů ve tvaru:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)}, \quad V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (5)$$

Pro základní signály v regulačním obvodu můžeme odvodit následující vztahy (v zájmu zkrácení zápisu bude v některých dalších vztazích u polynomů argument  $s$  vynechán a bude zachován pouze u obrazů signálů):

$$Y(s) = \frac{b}{d} \cdot [qW(s) + pV(s)] \quad (6)$$

$$E(s) = \frac{p}{d} \cdot [aW(s) - bV(s)] \quad (7)$$

$$U_0(s) = \frac{q}{d} \cdot [aW(s) - bV(s)] \quad (8)$$

kde  $d$  představuje charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu:

$$d = ap + bq \quad (9)$$

Polynom  $d$  v sobě obsahuje známé polynomy  $a$ ,  $b$  z přenosu řízeného systému a prozatím neznámé polynomy  $q$ ,  $p$  z přenosu regulátoru.

Nyní můžeme definovat podmínku vnitřní stability uzavřeného regulačního obvodu:

Systém řízení (regulační obvod) je stabilní tehdy, jestliže polynomy  $q$  a  $p$  v přenosu zpětnovazebního regulátoru (7) jsou řešeními polynomiální (diofantické) rovnice:

$$a(s) \cdot p(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (10)$$

se stabilním polynomem  $d(s)$  na pravé straně.

Rovnicí (10) je zajištěna první ze základních podmínek kladených na systém řízení. Podmínka vnitřní ryzosti systému řízení je splněna nerovnostmi (4).

Podmínka asymptotického sledování žádané hodnoty a kompenzace poruchy bude splněna, jestliže bude platit:

$$p(s) = f(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (11)$$

kde: polynom  $f(s)$  je nejmenší společný násobek polynomů  $f_w(s)$  a  $f_v(s)$

Dosazením vztahu (11) do rovnice (10) dostaneme polynomiální rovnici ve tvaru:

$$a(s) \cdot f(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (12)$$

Stupně polynomů  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$  a  $d(s)$  nutné pro vyřešení polynomiální diofantické rovnice (12) budou uvedeny přímo. Podrobné odvození lze nalézt např. v [1],[4],[6].

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f) - 1 \quad (13)$$

$$\deg(\tilde{p}) \geq \deg(a) - 1 \quad (14)$$

$$\deg(d) \geq 2 \deg(a) + \deg(f) - 1 \quad (15)$$

Pozn.: Pokud v rovnicích (14) a (15) uvažujeme rovnost, získáme nestriktně ryzí regulátor, pokud budeme uvažovat nerovnost, získáme striktně ryzí regulátor.

Pozn.: V uvedeném textu byl regulátor odvozen pro poruchovou veličinu, která se pouze „přičítá“ k vypočtenému akčnímu zásahu regulátoru. Existují však další možnosti, jak lze poruchovou veličinu do soustavy zavést (lze ji např. připočítávat k výstupu, apod.).

Poměrně často uváděnou možností je postup, kdy skokovou poruchu necháme působit na přenos ve tvaru:

$$G_V(s) = \frac{Y_V(s)}{V(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} \quad (16)$$

kde:  $a(s)$  a  $c(s)$  představují polynomy v  $s$ . Předpokládáme, že polynomy  $a(s)$  a  $c(s)$  jsou nesoudělné a splňují podmínku ryzosti:

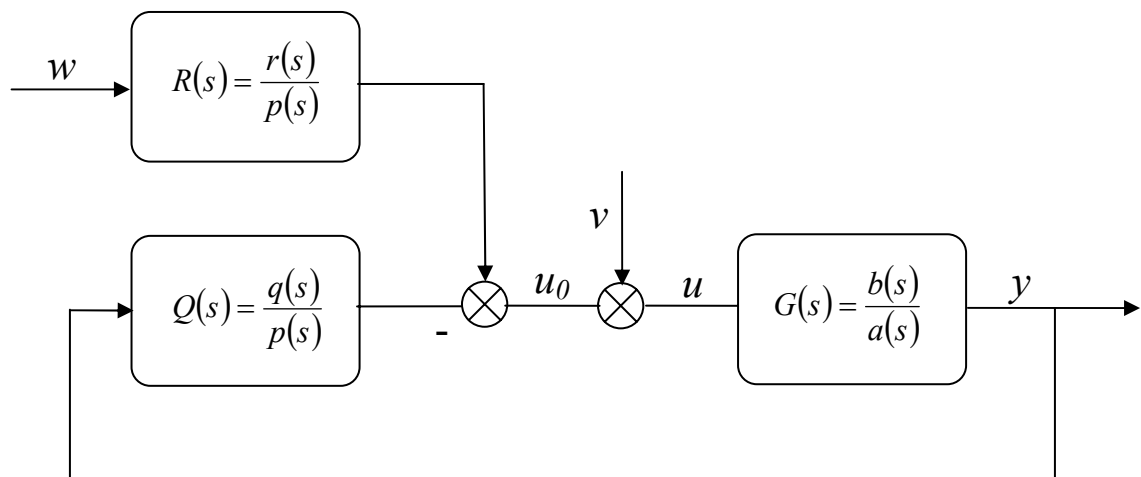
$$\deg c(s) \leq \deg a(s) \quad (17)$$

Takto získaný signál poté připočítáváme k výstupu soustavy.

Uvedená metoda má však ten nedostatek, že ji lze používat pouze pro stabilní soustavy. Pokud totiž regulujeme nestabilní soustavu (tj. polynom  $a(s)$  je nestabilní), zjistíme, že vliv poruchové veličiny nelze eliminovat a regulační pochod bude nestabilní. Důvodem je, že přenos  $G_V(s)$  není v uzavřené regulační smyčce a tudíž jeho výstupní signál trvale narůstá a může teoreticky dosahovat až nekonečných hodnot.

### 1.3 2DOF konfigurace systému řízení

Označení této konfigurace vzniklo z anglického *two degree of freedom* (dva stupně volnosti). Při této konfiguraci regulátor obsahuje vedle zpětnovazební části  $Q$  také přímo-vazební část  $R$ . Schéma je na Obr. 2.



Obr. 2 – 2DOF konfigurace systému řízení

Přenosy v regulačním obvodu:

$Q(s)$  – zpětnovazební část regulátoru

$R(s)$  – přímo-vazební část regulátoru

Signály působící v regulačním obvodu:

Význam ostatních symbolů v regulačním obvodu 2DOF, znázorněném na Obr. 2, odpovídá značení, které bylo použito při popisu obvodu 1DOF, uvedeném v kapitole 1.2.

Přenosy obou částí regulátoru předpokládáme ve tvaru podílu nesoudělných polynomů  $q, p$  a  $r, p$ :

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)}, R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (18)$$

Podmínka ryzosti (fyzikální realizovatelnosti regulátoru) zde musí být splněna nejen pro zpětnovazební část regulátoru, ale i pro přímo-vazební část regulátoru, takže platí:

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (19)$$

$$\deg r(s) \leq \deg p(s) \quad (20)$$

Obrazy obou vstupních signálů (referenčního signálu a poruchy) můžeme rovněž chápat jako podíly polynomů ve tvaru:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)}, V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (21)$$

Pro základní signály v regulačním obvodu bude platit:

$$Y(s) = \frac{b}{d} \cdot [rW(s) + pV(s)] \quad (22)$$

$$E(s) = \frac{1}{d} \cdot [(d - br)W(s) - bpV(s)] \quad (23)$$

$$U_0(s) = \frac{1}{d} \cdot [arW(s) + qbV(s)] \quad (24)$$

kde  $d$  představuje charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu:

$$d = ap + bq \quad (25)$$

Do obrazu regulační odchylky (23) dosadíme obrazy vstupních signálů (18) a dostaneme:

$$E(s) = \frac{1}{d} \cdot \left[ (d - br) \frac{h_w(s)}{f_w(s)} - bp \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \right] \quad (26)$$



Postačující podmínkou asymptotického sledování je, aby polynom  $f_w$  dělil polynom  $(d - br)$ , což bude splněno, jestliže bude platit:

$$(d - br) = tf_w \quad (27)$$

kde  $t$  představuje prozatím neznámý polynom.

Postačující podmínkou pro úplnou kompenzaci je, aby polynom  $f_w$  dělil polynom  $p$ , tzn., aby polynom  $p$  byl ve tvaru:

$$p(s) = f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (28)$$

Výsledný regulátor je tedy dán řešením dvojice polynomiálních rovnic:

$$a(s) \cdot f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (29)$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s) \quad (30)$$

Stupně polynomů  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$  a  $d(s)$  nutné pro vyřešení polynomiálních diofantických rovnic (29) a (30) budou uvedeny přímo. Podrobné odvození lze nalézt např. v [1],[4],[6]:

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f_v) - 1 \quad (31)$$

$$\deg(r) = \deg(f_w) - 1 \quad (32)$$

$$\deg(\tilde{p}) = \deg(a) - 1 + k \quad (33)$$

$$\deg(d) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - 1 + k \quad (34)$$

$$\deg(t) = \deg(d) - \deg(f_w) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - \deg(f_w) - 1 + k \quad (35)$$

kde pro číslo  $k$  platí:

$$k \geq \deg(f_w) - \deg(f_v) - \deg(a) \quad (36)$$

Při návrhu regulátoru musí vždy platit  $k \geq 0$ . Můžeme tedy postupovat tak, že vypočítáme číslo  $k_0$  jako:

$$k_0 = \deg(f_w) - \deg(f_v) - \deg(a) \quad (37)$$

Pro číslo  $k$  dosazované do vztahů (33), (34) a (35) pak platí:

$$k \geq 0 \text{ pro } k_0 \leq 0 \quad (38)$$

$$k \geq k_0 \text{ pro } k_0 > 0 \quad (39)$$

Opět vidíme, že odvozené vztahy pro výpočet stupňů polynomů v přenosech regulátoru umožňují velmi rychlé určení jeho struktury. Nestriktní nebo striktní ryzost regulátoru závisí na rovnosti nebo ostré nerovnosti v rovnicích (38) a (39).

Pozn.: Při návrhu regulátoru 2DOF je třeba věnovat značnou pozornost stabilitě regulátoru. Zatímco u konfigurace 1DOF platí, že i nestabilní regulátor může regulační pochod stabilizovat, u konfigurace 2DOF toto možné není a nestabilní regulátor vede vždy k nestabilnímu regulačnímu pochodu a to i přesto, že zpětnovazební část je sama o sobě stabilní. Problémy způsobuje přímovazební část regulátoru..

## 2 VOLBA CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU $D(S)$

Jak bylo uvedeno v předcházejících kapitolách, hlavní podmínkou, kterou musíme při volbě charakteristického polynomu uzavřeného regulačního obvodu  $d(s)$  dodržet, je jeho stabilita. Vhodnou volbou pólů tohoto polynomu však můžeme ovlivnit také průběh a kvalitu celého regulačního pochodu.

Obecně lze konstatovat, že volba polynomu  $d(s)$  představuje nejnáročnější část polynomiálního návrhu regulátoru. V následujících kapitolách budou uvedeny některé z nejpoužívanějších metod přiřazení pólů.

### 2.1 Metoda přiřazení pólů - obecné požadavky na polynom $d(s)$

Polynom  $d(s)$  můžeme obecně zapsat ve tvaru :

$$d(s) = \prod_{i=1}^{\deg d} (s - s_i) \quad (40)$$

kde  $s_i = \alpha_i + j\beta_i$ . Polynom  $d(s)$  je potom stabilní, jestliže reálné složky jsou záporné, tj. jestliže  $\text{Re}[s_i] = \alpha_i < 0$  pro  $i = 1, \dots, \deg d$ .

Pro volbu pólů potom budou platit následující obecné podmínky:

- Jestliže budou všechny póly reálné ( $\beta_i = 0$ ), bude výsledný pochod aperiodický
- Pokud bude mezi póly alespoň jedna dvojice pólů komplexně sdružených, bude výsledný pochod kmitavý.
- Rychlost regulačního pochodu ovlivňuje velikost reálných složek pólů. Čím budou vzdálenější od nuly (v záporném smyslu), tím bude regulační pochod rychlejší, ovšem s vyššími nároky na akční veličinu.

### 2.2 Nejčastější způsoby volby polynomu $d(s)$

Pravděpodobně nejpoužívanějším předpisem jak zvolit polynom  $d(s)$ , je volba vícenásobného reálného pólu ve tvaru:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} \quad (41)$$

kde:  $\alpha > 0$ .

Pokud volíme vícenásobné reálné kořeny polynomu  $d(s)$ , zjednoduší se nám sice výpočet regulátoru, ale získaný regulační pochod nemusí mít nejvhodnější průběh. Velice častým problémem jsou neúměrné akční zásahy na počátku regulace.

Jako poměrně vhodná se jeví volba, kdy část pólů přenosu uzavřeného regulačního obvodu souvisí s parametry přenosu řízeného systému. Parametry regulátoru tak mohou být nastavovány pomocí jediného volitelného parametru.

Nejjednodušší metodou je rozdělení  $d(s)$  na dvojici polynomů podle předpisu:

$$d(s) = m(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg m} \quad (42)$$

kde  $m(s)$  představuje:

- pro stabilní nekmitavý regulační pochod:

$$m(s) = a(s) \quad (43)$$

- pro nestabilní nekmitavý regulační pochod:

$$m(s) = n(s) \quad (44)$$

kde  $n(s)$  je výsledkem spektrální faktorizace polynomu  $a(s)$ :

$$n^*(s)n(s) = a^*(s)a(s) \quad (45)$$

Např.: pro nestabilní polynom  $a(s) = s^2 + a_1s + a_0$  je postup při spektrální faktorizaci (45) následující:

$$a^*(s)a(s) = (s^2 - a_1s + a_0)(s^2 + a_1s + a_0) = s^4 - (a_1^2 - 2a_0)s^2 + a_0^2 \quad (46)$$

Po zavedení polynomu  $n(s) = s^2 + n_1s + n_0$  podobně získáme:

$$n^*(s)n(s) = (s^2 - n_1s + n_0)(s^2 + n_1s + n_0) = s^4 - (n_1^2 - 2n_0)s^2 + n_0^2 \quad (47)$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách  $s$  na pravých stranách (46) a (47) pak dostaneme:

$$n_0 = \sqrt{a_0^2} \quad (48)$$

$$n_1 = \sqrt{a_1^2 + 2n_0 - 2a_0} \quad (49)$$

Z uvedených vzorců (48) a (49) je patrné, že vždy platí  $n_0 > 0$  a  $n_1 > 0$ . Polynom  $n(s)$  je tak za všech okolností stabilní.

Pozn.: Výše uvedené volby polynomu  $d(s)$  často vyhovují také pro kmitavé regulační pochody. Problémem je však to, že nelze předem říci, zda bude zvolený postup vyhovovat. Důvodem je, že pokud je polynom  $a(s)$  kmitavý, je kmitavý také celý regulační pochod. V mnoha případech je toto kmitání téměř nepostřehnutelné a regulační pochod se chová skoro stejně jako aperiodický. V dalších případech však můžeme získat i zcela nevhodný regulační pochod, kdy výstupní veličina netlumeně kmitá. Pokud je tedy regulační pochod kmitavý, je vhodné přednostně používat jiné metody volby polynomu  $d(s)$ .

Další možností je volba polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení, která je blíže popsána v následující kapitole.

## 2.3 Optimální řízení

Za předpokladu, že vstupní signál a porucha jsou skokové funkce (jak bude ukázáno dále, lze kvalitních regulačních pochodů dosáhnout i pro jiné než skokové funkce a to i tehdy, pokud použijeme vztahy uvedené v této kapitole. Je třeba si ale uvědomit, že při správné aplikaci metod LQ řízení na jiné než skokové funkce je nutné předdefinovat

výpočet polynomu  $g(s)$ . Zde uvedené volby je tedy třeba chápat pouze jako užitečnou pomůcku, protože o optimální řízení se jedná pouze pokud jsou vstupní signály skokové funkce!), můžeme pro všechny typy systémů (stabilní i nestabilní, s minimální i neminimální fází) využít postupu známého z LQ řízení. Polynom  $d(s)$  pak volíme ve tvaru:

$$d(s) = g(s)m(s) \quad (50)$$

kde  $g(s)$  představuje stabilní polynom daný spektrální faktorizací:

$$[s \cdot a(s)]^* \cdot \varphi \cdot s \cdot a(s) + b^*(s) \cdot b(s) = g^*(s) \cdot g(s) \quad (51)$$

kde:  $\varphi$  představuje volitelný koeficient

Spektrální faktorizace (51) je známá z LQ řízení (podrobněji např. v [7]), kde je použita při minimalizaci kvadratického funkcionálu:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \varphi i^2(t)] dt \quad (52)$$

a  $\varphi$  představuje váhový koeficient u kvadrátu derivace akční veličiny.

Spektrální faktorizace bude provedena pro systém 2. řádu s přenosem akční veličiny  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$ . Levá strana rovnice (51) potom bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} [s \cdot a(s)]^* \cdot \varphi \cdot s \cdot a(s) + b^*(s) \cdot b(s) &= (-s)(s^2 - a_1s + a_0)\varphi(s)(s^2 + a_1s + a_0) + \\ &+ (-b_1s + b_0)(b_1s + b_0) = -\varphi s^6 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)s^4 - (\varphi a_0^2 + b_1^2)s^2 + b_0^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Polynom  $g(s)$  potom musí být třetího stupně a volíme jej jako:

$$g(s) = g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0 \quad (54)$$

Pravá strana rovnice (51) potom bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} g^*(s) \cdot g(s) &= (-g_3s^3 + g_2s^2 - g_1s + g_0)(g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0) = \\ &= -g_3^2s^6 + (g_2^2 - 2g_1g_3)s^4 - (g_1^2 - 2g_0g_2)s^2 + g_0^2 \end{aligned} \quad (55)$$

Porovnáním koeficientů na pravých stranách vztahů (54) a (55) při stejných mocninách  $s$  dostaneme pro koeficienty polynomu  $g(s)$  následující vztahy:

$$g_3 = \sqrt{\varphi}, \quad g_2 = \sqrt{2g_1g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}, \quad g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + \varphi a_0^2 + b_1^2}, \quad g_0 = \sqrt{b_0^2} \quad (56)$$

Pro řešení koeficientů  $g_2$  a  $g_1$  je vhodné použít některou z numerických metod. V kapitole 4.3 bude uveden postup řešení pomocí Newtonovy metody.

Polynom  $m(s)$  v rovnici (50) pak může být volen různým způsobem. Pro stabilní nekmitavý systém může být volen jako:

$$m(s) = a(s) \quad (57)$$

a pro nestabilní systém

$$m(s) = n(s) \quad (58)$$

kde  $n(s)$  je výsledkem spektrální faktorizace polynomu  $a(s)$ :

$$n^*(s)n(s) = a^*(s)a(s) \quad (59)$$

Volby polynomu (57) a (58) vedou pro skokové vstupní veličiny ke striktně ryzím regulátorům.

Pokud nám stačí pouze nestriktně ryzí regulátor, můžeme polynom  $m(s)$  volit například podle předpisu:

$$m(s) = (s + \alpha)^{\deg d - \deg g} \quad (60)$$

Další možností jak zvolit polynom  $m(s)$  je rozdělit nestabilní polynom  $a(s)$  na stabilní a nestabilní část:

$$a(s) = a^+(s)a^-(s) \quad (61)$$

kde  $a^+(s)$  představuje stabilní část. Potom, jestliže je splněna podmínka  $\deg a^+ = \deg a - 1$ , můžeme volit polynom  $m(s)$  ve tvaru:

$$m(s) = a^+(s) \quad (62)$$

Pokud bychom potřebovali polynom vyššího stupně než je  $\deg d > \deg g + \deg a^+$ , můžeme za předpokladu, že  $\deg a^+ = 1$ , rovnici (62) modifikovat na tvar:

$$m(s) = [a^+(s)]^{\deg d - \deg g} \quad (63)$$

V případě, že  $\deg a^+ > 1$  můžeme podmínku (63) upravit, a to za předpokladu, že:

- podíl  $(\deg d - \deg g) / \deg a^+$  je celé číslo, na tvar:

$$m(s) = [a^+(s)]^{\frac{\deg d - \deg g}{\deg a^+}} \quad (64)$$

- v ostatních případech:

$$m(s) = a^+(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g - \deg a^+} \quad (65)$$

Volba (65) je samozřejmě použitelná i místo vztahu (63).

Do podobných potíží, kdy potřebujeme polynom vyššího stupně než který nám umožňuje základní volba, se můžeme dostat i při volbě  $m(s) = n(s)$ . V takovém případě lze využít modifikovaných voleb (64) a (65). Díky výše uvedeným volbám lze použít zde uvedené metody LQ řízení i pro vstupní signály s jiným průběhem než je skoková funkce.

Do poměrně značných potíží se můžeme dostat při volbě polynomu  $d(s)$  pro integrační soustavu. V takovém případě jsme obecně odkázáni pouze na volbu (41).

V případě, že se jedná o stabilní soustavu s integrační složkou, je možná také volba (50), protože polynom  $a(s)$  můžeme rozdělit na tvar:

$$a(s) = s^k a^+(s) \quad (66)$$

a následně využít jednu z voleb (62) až (64).

Pokud se však jedná o nestabilní soustavu s integrační složkou, je možné polynom  $a(s)$  rozepsat jako:

$$a(s) = s^k a^+(s) a^-(s) \quad (67)$$

$$a(s) = s^k a^-(s) \quad (68)$$

Potom v případě (67) můžeme opět využít jednu z voleb (62) až (64).

V případě (68) je využitelná modifikace volby (58), kdy provedeme spektrální faktorizaci polynomu  $a^-(s)$ :

$$n^*(s)n(s) = (a^-)^*(s)a^-(s) \quad (69)$$

Např.: pro nestabilní polynom  $a^-(s) = s + a_1$  je postup při spektrální faktorizaci (69) následující:

$$[a^-(s)]^* a(s) = (-s + a_1)(s + a_1) = -s^2 + a_1^2 \quad (70)$$

Po zavedení polynomu  $n(s) = s + n_0$  podobně získáme:

$$n^*(s)n(s) = (-s + n_0)(s + n_0) = -s^2 + n_0^2 \quad (71)$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách  $s$  na pravých stranách (70) a (71) pak dostaneme:

$$n_0 = \sqrt{a_1^2} \quad (72)$$

Pokud volíme polynom  $m(s)$  podle předpisu (57), (58), (62) a (63), nastavujeme parametry regulátoru pouze pomocí jediného váhového parametru  $\varphi$ . Jeho nastavením ovlivňujeme především rychlost regulačního pochodu.

Pozn.: Ani jeden z výše uvedených postupů při volbě polynomu  $d(s)$  nedokáže vyřešit problém s nestabilitou regulátorů. Tento problém se projevuje především u nestabilních soustav s neminimální fází, kdy pro koeficienty jmenovatele přenosu platí:  $a_1 < 0$ ,  $a_0 < 0$ .

### 3 SYSTÉMY S VLASTNOSTMI OBECNĚ NEVHODNÝMI PRO REGULACI

#### 3.1 Systémy s dopravním zpožděním

Dopravní zpoždění představuje jev, který se v technické praxi projevuje u mnoha technologických procesů. Systémy s dopravním zpožděním se zpravidla obtížně regulují a navíc velmi často mohou mít některé další vlastnosti, které činí regulaci běžnými typy regulátorů téměř nemožnou. Může se jednat například o soustavy nestabilní nebo s integračními vlastnostmi. Typickými příklady takových procesů jsou například pumpy, nádrže na kapalinu nebo některé typy chemických reaktorů.

Pod pojmem zpoždění obecně rozumíme časové posunutí mezi příčinou a jejím důsledkem. Zpoždění obecně snižuje přípustné hodnoty parametrů regulace, dovoluje pouze pomalejší akční zásahy v řízení a především ohrožuje stabilitu řízení zpětnou vazbou.[1]

##### 3.1.1 Aproximace dopravního zpoždění

Pro aproximaci dopravního zpoždění se používají tři základní metody:

- Taylorův rozvoj prvního řádu v čitateli:

$$e^{-\Theta s} \approx 1 - \Theta s \quad (73)$$

- Taylorův rozvoj prvního řádu ve jmenovateli:

$$e^{-\Theta s} = \frac{1}{e^{\Theta s}} \approx \frac{1}{1 + \Theta s} \quad (74)$$

- Padé aproximace prvního řádu

$$e^{-\Theta s} = \frac{e^{-\frac{\Theta}{2}s}}{e^{\frac{\Theta}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{\Theta}{2}s}{1 + \frac{\Theta}{2}s} \quad (75)$$

Z uvedených aproximací se jako nejvýhodnější jeví Padé aproximace dopravního zpoždění (75), která ve většině případů vede k nejlepšímu přiblížení k originální soustavě a to jak v časové, tak také v frekvenční oblasti. Její další výhodou je, že nijak neovlivňuje relativní řád soustavy. Padé aproximaci lze použít pro většinu případů, ale především pro soustavy integrační a nestabilní vyhovuje pouze pro malé hodnoty dopravního zpoždění. Podrobnější informace lze nalézt např. v [1],[5],[8]



### 3.2 Nestabilní systémy

Stabilita dynamického systému je schopnost vrátit se po vychýlení zpět do původního stavu. Toto vychýlení je vždy způsobeno nenulovými počátečními podmínkami, z tohoto důvodu platí, že Ljapunovská stabilita je vlastností pouze levé strany diferenciální rovnice (tedy jmenovatele přenosu).

Podle stability rozlišujeme systémy na:

- *stabilní* - systém se po vychýlení vrátí do původní polohy
- *na hranici stability* - systém se po vychýlení nevrátí do původní polohy, ale ani neunikne
- *nestabilní* - systém po vychýlení unikne

Systém označujeme jako nestabilní, pokud jeden nebo více z kořenů jmenovatele jeho přenosu leží v pravé části komplexní poloroviny.

Nestabilní systémy se v praxi velmi často vyskytují ve spojení s některými dalšími negativními vlastnostmi, jako je dopravní zpoždění, nestabilita čitatele (systémy neminimálně fázové), integrační vlastnosti. Tyto systémy jsou pak klasickými typy regulátorů prakticky netříditelné a i návrh regulátorů pomocí polynomiálních metod může činit potíže. Především se jedná o volbu vhodného stabilního polynomu  $d(s)$  a také struktury navrhovaného regulátoru (1DOF, 2DOF).

Pro některé typy nestabilních soustav je dokonce téměř nemožné nalézt stabilní regulátor. To ovšem znamená, že pro regulaci těchto soustav lze regulátory 1DOF použít pouze s omezeními a regulátory 2DOF nelze použít vůbec.

### 3.3 Systémy s neminimální fází

Systémy s neminimální fází jsou systémy, které mají nestabilní nulu v čitateli. Pokud tedy na vstup takovéto soustavy přivedeme skokovou změnu vstupní veličiny, mění se výstupní veličina nejprve opačným směrem, než je výsledný směr výstupní veličiny v čase  $t = \infty$ .

Systémy tohoto typu se běžnými regulátory regulují pouze obtížně. Jejich význam je však značný, protože na soustavy tohoto typu vede Padé aproximace dopravního zpoždění.

## 4 PRAKTICKÁ UKÁZKA NÁVRHU REGULÁTORŮ POLYNOMIÁLNÍ METODU

V předešlých kapitolách byly uvedeny vztahy pro návrh regulátorů pomocí polynomiální metody syntézy. V této části budou uvedeny konkrétní postupy a dále bude poukázáno na některé problémy, které mohou při návrhu nastat.

### 4.1 Návrh regulátoru 1DOF

Syntéza 1DOF regulátoru pomocí metody neurčitých koeficientů je poměrně jednoduchá, rychlá a ve většině případů podává velmi dobré výsledky.

Dá se však dokázat, že existují případy, kdy polynomiální metodu použít nemůžeme, protože pro zadaný přenos regulátor typu 1DOF neexistuje.

V následující části bude obecně odvozen regulátor 1DOF pro soustavu druhého řádu s relativním řádem přenosu 1 (jedná se tedy o soustavu, která nemá v čitateli přenosu pouze konstantu).

Přenos soustavy budeme uvažovat ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (76)$$

Přenos regulátoru předpokládáme ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0}{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0} \quad (77)$$

kde:  $n \leq m$

Žádanou hodnotu a poruchovou veličinu volíme pro jednoduchost jako skokové signály  $w(t) = w_0$  a  $v(t) = v_0$ , které můžeme vyjádřit pomocí následujících obrazů v  $s$ :

Obraz žádané hodnoty:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} = \frac{w_0}{s} \Rightarrow \deg(f_w) = 1 \quad (78)$$

Obraz poruchové veličiny:

$$V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} = \frac{v_0}{s} \Rightarrow \deg(f_v) = 1 \quad (79)$$

Nyní musíme určit nejmenší společný násobek polynomů  $f_w$  a  $f_v$  a dále také stupeň tohoto polynomu:

$$f(s) = s \Rightarrow \deg(f) = 1 \quad (80)$$

V dalším kroku sestavíme obecnou polynomiální rovnici uzavřeného regulačního obvodu:

$$a(s) \cdot f(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (81)$$

Pomocí vzorců odvozených v části 2.2 nyní určíme polynomy  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$  a  $d(s)$ :

$$q(s) = q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (82)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \quad (83)$$

$$d(s) = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \quad (84)$$

Polynomy  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $q(s)$ ,  $\tilde{p}(s)$  a  $d(s)$  dosadíme do polynomiální rovnice (81):

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1 s + a_0) s (\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + (b_1 s + b_0) (q_2 s^2 + q_1 s + q_0) &= \\ = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 & \end{aligned} \quad (85)$$

Úpravou rovnice (85) a převedením do společných mocnin s získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} s^4 : \quad & \tilde{p}_1 & & & & = d_4 \\ s^3 : \quad & a_1 \tilde{p}_1 & + \tilde{p}_0 & + b_1 q_2 & & = d_3 \\ s^2 : \quad & a_0 \tilde{p}_1 & + a_1 \tilde{p}_0 & + b_0 q_2 & + b_1 q_1 & = d_2 \\ s^1 : \quad & & a_0 \tilde{p}_0 & & + b_0 q_1 & + b_1 q_0 = d_1 \\ s^0 : \quad & & & & & b_0 q_0 = d_0 \end{aligned} \quad (86)$$

Abychom soustavu rovnic (86) mohli vyřešit co nejjednodušším způsobem, je vhodné ji převést do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

Maticovou rovnicí (87) pak můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (88)$$

A následně pomocí maticových operací převést na řešitelný tvar:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (89)$$

Maticová rovnice (89) je řešitelná, jestliže platí:

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (90)$$

Obecný výpočet determinantu matice  $\mathbf{A}$  vyžaduje množství poměrně obtížných maticových operací.

Pro určení podmínek řešitelnosti však lze soustavu rovnic (86) zjednodušit, a to za předpokladu:

$$\tilde{p}_1 = d_4 \quad (91)$$

$$q_0 = \frac{d_0}{b_0} \quad (92)$$

kde platí:  $d_4 \neq 0$  a  $b_0 \neq 0$

Po dosazení rovnic (91) a (92) do soustavy rovnic (86) získáme zjednodušenou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} s^3: \quad \tilde{p}_0 + b_1 q_2 &= d_3 - a_1 d_4 \\ s^2: \quad a_1 \tilde{p}_0 + b_0 q_2 + b_1 q_1 &= d_2 - a_0 d_4 \\ s^1: \quad a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_1 &= d_1 - \frac{b_1}{b_0} d_0 \end{aligned} \quad (93)$$

kteřou opět můžeme přepsat do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_3 - a_1 d_4 \\ d_2 - a_0 d_4 \\ d_1 - \frac{b_1}{b_0} d_0 \end{pmatrix} \quad (94)$$

a obecně vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}_1 \quad (95)$$

Maticová rovnice (95) je řešitelná, jestliže platí:

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = b_0^2 + a_0 b_1^2 - a_1 b_1 b_0 \neq 0 \quad (96)$$

Pokud jsou splněny podmínky v rovnicích (91) a (92), platí odvozený vztah (96) jako podmínka řešitelnosti i pro maticovou rovnici (87). Pokud není rovnice (96) splněna, nelze pro danou soustavu navrhnout regulátor 1DOF.

Splnění rovnice (96) však rozhoduje pouze o tom, zda regulátor pro danou soustavu existuje. O tom, zda regulátor bude stabilní nebo nestabilní, popř. jaká bude kvalita regulačního pochodu, rozhoduje především umístění kořenů polynomu  $d(s)$ .

Pokud bychom provedli detailní rozbor, zjistili bychom, že podmínka (96) není splněna pro soustavy, které mají soudělné polynomy  $a(s)$  a  $b(s)$ . Při vlastním odvození vztahů pro regulátory 1DOF jsme sice podmínku nesoudělnosti předpokládali, avšak při praktickém návrhu regulátoru pro zadanou soustavu nemůžeme situaci, kdy podmínka nesoudělnosti nebude splněna, zcela vyloučit. Toto nebezpečí hrozí především při použití adaptivních metod, kdy se provádí identifikace soustavy samočinně. Proto je vhodné s takovou možností počítat a podmínku (96) při návrhu regulátoru uvažovat.

## 4.2 Návrh regulátoru 2DOF

Přenos soustavy budeme opět uvažovat ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (97)$$

Přenos obou částí regulátorů předpokládáme ve tvaru:

$$R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{r_k s^k + r_{r-1} s^{k-1} + \dots + r_0}{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0} \quad (98)$$

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0}{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0} \quad (99)$$

kde:  $r \leq m$ ,  $n \leq m$

Žádanou hodnotu a poruchovou veličinu volíme pro jednoduchost opět jako skokové signály  $w(t) = w_0$  a  $v(t) = v_0$ , které můžeme uvažovat ve tvaru (8).

V dalším kroku sestavíme obecné polynomiální rovnice potřebné pro návrh zpětnovazební a přímovazební části regulátoru:

$$a(s) \cdot f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (100)$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s) \quad (101)$$

Pomocí vzorců odvozených v kapitole 1.3 nyní určíme neznámé polynomy  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$  a  $d(s)$ :

$$q(s) = q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (102)$$

$$r(s) = r_0 \quad (103)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \quad (104)$$

$$t(s) = t_3 s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \quad (105)$$

$$d(s) = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \quad (106)$$

Polynomy (102) až (106) dosadíme do polynomiálních rovnic (100) a (101):

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1 s + a_0) \cdot s \cdot (\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + (b_1 s + b_0) \cdot (q_2 s^2 + q_1 s + q_0) = \\ = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \end{aligned} \quad (107)$$

$$(t_3 s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0) \cdot s + (b_1 s + b_0) \cdot (r_0) = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \quad (108)$$

Úpravou rovnic (107) a (108), jejich převedením do společných mocnin  $s$  a následným převedením do maticového tvaru získáme maticové rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Pro výpočet parametrů regulátoru Q je třeba vyřešit maticovou rovnici (109). Při výpočtu parametrů regulátoru R stačí řešit pouze poslední řádek maticové rovnice (110). Pokud však rovnici (110) vyřešíme celou, můžeme polynom  $t(s)$  použít při výpočtu regulační odchylky.

Aby byla maticová rovnice (109) řešitelná, musí být splněna stejná podmínka jako v případě regulátoru 1DOF:

$$b_0^2 + a_0 b_1^2 - a_1 b_1 b_0 \neq 0 \quad (111)$$

### 4.3 Optimální řízení

Jak bylo uvedeno v kapitole 2.3, pro získání koeficientů polynomu  $g(s)$  musíme vyřešit následující soustavu rovnic:

$$g_0 = \sqrt{b_0^2} \quad (112)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0 g_2 + \varphi \alpha_0^2 + b_1^2} \quad (113)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} \quad (114)$$

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (115)$$

Rovnice (112) a (115) můžeme vyřešit přímo, ale abychom dokázali co nejjednodušeji vyřešit rovnice (113) a (114), je vhodné využít některou z numerických metod.

V této části bude uveden způsob řešení pomocí Newtonovy metody.

## NEWTONOVA METODA:

Při řešení rovnic pomocí Newtonovy metody postupujeme podle následujícího předpisu:

Mějme soustavu rovnic pro kterou platí:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad (116)$$

Potom pro  $i$ -tou rovnicí platí:

$$f_i(x) \approx f_i(x^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \cdot (x_j^{k+1} - x_j^k) \quad (117)$$

Za předpokladu, že platí (116), můžeme rovnici (117) přepsat do tvaru:

$$f_i(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_i(x^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \cdot (\delta_j^k) \quad (118)$$

kde:  $\delta_j^k = x_j^{k+1} - x_j^k$

Pro soustavu rovnic (116) potom můžeme psát:

$$0 = \vec{f}(\vec{x}^k) + \vec{f}'(\vec{x}^k) \cdot \vec{\delta}^k \quad (119)$$

Řešení vektoru  $\vec{x}$  se pak provádí iteračně a platí:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - [\vec{f}'(\vec{x}^k)]^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}^k) \quad (120)$$

kde:

$$\vec{f}'(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ a } \vec{f}(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} f_1(x^k) \\ f_2(x^k) \\ \vdots \\ f_n(x^k) \end{bmatrix} \quad (121)$$

Při výpočtu parametrů  $g_1$  a  $g_2$  tedy upravíme rovnice (113) a (114) na tvar:

$$\sqrt{2g_0g_2 + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1 = 0 \quad (122)$$

$$\sqrt{2g_1g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2 = 0 \quad (123)$$

Určíme matici  $\bar{F}'(\bar{x}^k)$ :

$$\bar{F}'(\bar{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \frac{\partial f_1}{\partial g_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial g_1} & \frac{\partial f_2}{\partial g_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{g_0}{\sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2}} \\ \frac{g_3}{\sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}} & -1 \end{bmatrix} \quad (124)$$

a dále matici  $\vec{f}(\bar{x}^k)$ :

$$\vec{f}(\bar{x}^k) = \begin{bmatrix} f_1(g_1^k, g_2^k) \\ f_2(g_1^k, g_2^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1^k \\ \sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2^k \end{bmatrix} \quad (125)$$

Potom pro řešení  $\begin{bmatrix} g_1^{k+1} \\ g_2^{k+1} \end{bmatrix}$  bude platit:

$$\begin{bmatrix} g_1^{k+1} \\ g_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^k \\ g_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \frac{g_0}{\sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2}} \\ \frac{g_3}{\sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1^k \\ \sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2^k \end{bmatrix} \quad (126)$$

Maticovou rovnici (126) potom řešíme iteračním procesem. Aby byla rovnice vůbec řešitelná, musíme zvolit počáteční hodnoty  $\begin{bmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \end{bmatrix}$ . Jako vhodné se jeví například počáteční hodnoty  $g_1^0 = g_2^0 = 1000$ .



## 5 UKÁZKY REGULAČNÍCH POCHODŮ

V této kapitole bude uvedeno několik příkladů regulačních pochodů jednak pro různé typy regulovaných soustav (integrační, nestabilní, neminimálně fázové, apod.), dále pro různé konfigurace regulačních obvodů (1DOF, 2DOF) a také pro různé volby polynomu  $d(s)$ .

Vzhledem k obrovskému množství různých kombinací, které lze použít, a omezenému prostoru, bude zvláštní pozornost věnována především soustavám, které jsou běžnými způsoby pouze obtížně regulovatelné (tj. soustavy integrační, nestabilní, neminimálně fázové) a dále volbě polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení.

Při vyhodnocování kvality regulace bylo přednostně použito upravené kvadratické kritérium podle předpisu:

$$J^2 = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n [w(i) - y(i)]^2 + \sum_{j=2}^n [u(j) - u(j-1)]^2 + u^2(1) \right) \quad (127)$$

kde:  $n$  je počet vzorků regulačního pochodu

Uvedené kritérium (129) neodpovídá zcela přesně standardnímu kvadratickému kritériu, které je definováno jako:

$$J^2 = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \cdot \left( \sum_{k=k_1}^{k_2} [w(k) - y(k)]^2 + \sum_{k=k_1}^{k_2} [u(k) - u(k-1)]^2 \right) \quad (128)$$

kde  $\langle k_1, k_2 \rangle$  je zvolený interval pro určení kvality regulace a platí, že  $k_1 > 0$

Kritérium (128) nerespektuje akční zásah v čase  $t=0$ . To je dáno tím, že matematicky je  $\frac{du}{dt}$  v čase  $t=0$  rovno  $\infty$ .

Bohužel, pro různé volby polynomu  $d(s)$  zpravidla platí, že největší rozdíl mezi nimi je právě v počátečním akčním zásahu  $u(t=0)$ . Pokud jej tedy neuvažujeme, jsou výsledky hodnotícího kritéria zkreslené a neumožňují objektivně posoudit kvalitu regulace.

Z tohoto důvodu bylo navrženo upravené kritérium (127), kde se vychází z úvahy, že akční zásah  $u(t)$  v čase  $t < 0$  je roven  $u(t < 0) = 0$  a tedy  $\Delta u(t=0) = u(t=0)$ . Tato úvaha sice není matematicky zcela v pořádku, umožňuje však mnohem lépe posoudit výhody volby polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení.

Pro posouzení kvality regulace bylo použito také kritérium vycházející z absolutních hodnot ve tvaru:

$$|J| = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |w(i) - y(i)| + \sum_{j=2}^n |u(j) - u(j-1)| + |u(1)| \right) \quad (129)$$

kde:  $n$  je počet vzorků regulačního pochodu

Důvodem použití absolutního kritéria je skutečnost, že kvadratické kritérium znásobuje vliv velkých hodnot jak regulační odchylky, tak také změn akčního zásahu, zatímco vliv malých hodnot naopak potlačuje. Tím však může dojít ke zkreslení výsledků.

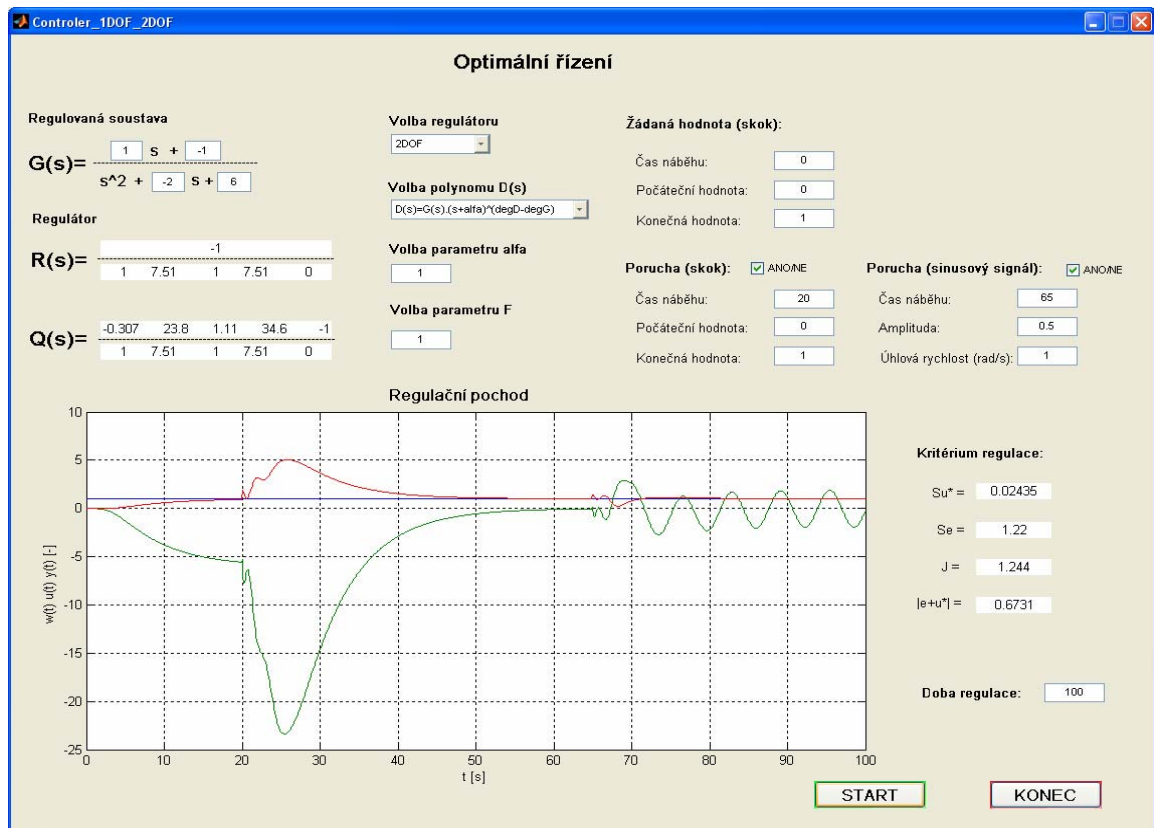
## 5.1 Použité programové vybavení

Pro účely této práce byla vytvořena dvojice programů v prostředí GUIDE programového balíku Matlab 7.0 od firmy MathWorks, Inc.. Jedná se o programy *Controler\_1DOF\_2DOF.m* a *Controler\_1DOF\_2DOF\_sin.m*.

Oba tyto programy jsou si z hlediska ovládání velmi podobné, proto bude popsán pouze program *Controler\_1DOF\_2DOF.m*.

Oba programy k syntéze regulátorů využívají knihovnu *polynomial toolbox* pro řešení polynomiálních diofantických rovnic. Důvodem je snaha o co nejvyšší univerzálnost. Pokud bychom postupovali přesně podle postupu uvedeného v teoretické části a pro každý typ regulátoru rovnice podrobně odvozovali, byl by program velmi složitý a nepřehledný. Použitím *polynomial toolboxu* se programování výrazně zjednodušilo a bylo tak možno vytvořit programy, které umožňují vypočítat regulátory typu 1DOF a 2DOF a dále také simulovat regulační pochody pro většinu regulovaných soustav 2. řádu.

Uvedený postup má však také své nevýhody. Protože bylo použito programování v rozhraní GUIDE, nelze zaručit kompatibilitu s jinými verzemi Matlabu než je verze 7.0.



Obr. 3 – Program *Controler\_1DOF\_2DOF.m*

### 5.1.1 Popis jednotlivých částí programu

#### Regulovaná soustava:

- umožňuje zadat soustavu 2. řádu s relativním řádem 1 nebo 2.

- aby byl výpočet možný, musí být každý z koeficientů číslo. Navíc platí, že koeficient  $b_0$  musí být různý od nuly.

### Regulátor

- zde je uveden výsledek řešení v obecném tvaru 
$$Q_R(s) = \frac{q_n s^n + \dots + q_1 s + q_0}{p_m s^m + \dots + p_1 s + p_0}$$

### Volba regulátoru:

- umožňuje zvolit regulátor typu 1DOF nebo 2DOF.

### Volba polynomu $d(s)$ :

- zde je možné zvolit polynom  $d(s)$  podle pravidel, které byly blíže specifikovány v kapitole 2.
- pro volby  $d(s) = g(s)n(s)$  a  $d(s) = g(s)a^+(s)$  platí, pokud je požadovaný stupeň  $d(s)$  vyšší než je maximální přípustný stupeň výše uvedených voleb, následující pravidla:

$$d(s) = g(s)n(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g - \deg n} \quad (130)$$

$$d(s) = n(s)(a^+)^{\deg d - \deg g} \quad (131)$$

### Volba parametru alfa:

- umožňuje nastavit parametr  $\alpha$  nutný pro většinu voleb polynomu  $d(s)$ .

### Volba parametru F:

- umožňuje nastavit váhový koeficient  $\varphi$  při volbě polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení.

### Žádaná hodnota (skok):

- umožňuje nastavit parametry žádané hodnoty.

### Porucha (skok):

- umožňuje nastavit parametry poruchy ve tvaru skoku.

### Porucha (sinusový signál):

- umožňuje nastavit parametry harmonické poruchy, která je zde představována sinusovým signálem.

### Kritérium regulace:

- udává hodnotu kvadratického a absolutního kritéria. Význam jednotlivých položek byl popsán na začátku této kapitoly.

### Doba regulace:

- umožňuje nastavit délku trvání simulace regulačního pochodu.

## 5.2 Řízení integračních soustav

Regulovanou soustavu integračního typu předpokládáme v obecném tvaru:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s + a_1)} \quad (132)$$

Pro ukázkou řízení integračních soustav byly vybrány následující příklady:

- Stabilní integrační soustava s minimální fází

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s} \quad (133)$$

- Nestabilní integrační soustava s minimální fází

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s} \quad (134)$$

- Stabilní integrační soustava s neminimální fází

$$G(s) = \frac{-s + 2}{s^2 + 3s} \quad (135)$$

- Nestabilní integrační soustava s neminimální fází

$$G(s) = \frac{-s + 3}{s^2 - 2s} \quad (136)$$

Pro řízení všech čtyř typů integračních soustav byly použity regulátory 1DOF a 2DOF.

Polynom  $d(s)$  byl zvolen ve tvaru:

$$d(s) = g(s)a^+ \quad \text{pro stabilní soustavy} \quad (137)$$

$$d(s) = g(s)n^*(s) \quad \text{pro nestabilní soustavy} \quad (138)$$

kde  $n^*(s)$  byl získán spektrální faktorizací nestabilní části polynomu  $a^-(s)$

## 5.3 Vliv volby polynomu $d(s)$ na průběh regulačního pochodu

Regulovanou soustavu předpokládáme v obecném tvaru:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (139)$$

Pro ukázkou vlivu volby polynomu  $d(s)$  na průběh regulačního pochodu byl zvolen typ soustavy, který lze obecně považovat z nejobtížněji regulovatelný – jedná se o kmitavou nestabilní soustavu s neminimální fází:

$$G(s) = \frac{-s + 2}{s^2 - 2s + 6} \quad (140)$$

K regulaci soustavy (174) bude použit regulátor 2DOF a polynom  $d(s)$  bude zvolen jako:

– Příklad 1:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} = (s + 1)^4 \quad (141)$$

$$d(s) = n(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg n} = n(s)(s + 1) \quad (142)$$

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \quad (143)$$

$$d(s) = g(s)n(s) \quad (144)$$

– Příklad 2:

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \text{ pro } \varphi = 0.2 \quad (145)$$

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \text{ pro } \varphi = 1 \quad (146)$$

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \text{ pro } \varphi = 5 \quad (147)$$

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \text{ pro } \varphi = 10 \quad (148)$$

V simulovaném regulačním pochodu bude také ukázán vliv poruchové veličiny ve tvaru skoku. Parametry poruchové veličiny:

$$v(t) = 0 \text{ pro } t < 30 \quad (149)$$

$$v(t) = -0.5 \text{ pro } t \geq 30 \quad (150)$$

## 5.4 Řízení procesů s dopravním zpožděním

Pro ukázkou regulace soustav s dopravním zpožděním byly zvoleny tři následující typy:

- Integrační systém s dopravním zpožděním (ITDS)
- Stabilní systém 1. řádu s dopravním zpožděním (SFOTDS)
- Nestabilní systém 1. řádu s dopravním zpožděním (UFOTDS)

Přenosové funkce systémů ITDS, SFOTDS, UFOTDS uvažujeme ve tvaru:

$$G_1(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau_d s} \quad (151)$$

$$G_{2,3}(s) = \frac{K}{\tau s \pm 1} e^{-\tau_d s} \quad (152)$$

Člen dopravního zpoždění  $e^{-\tau_d s}$  aproximujeme pomocí Padé aproximace na tvar:

$$e^{-\tau_d s} \approx \frac{2 - \tau_d s}{2 + \tau_d s} \quad (153)$$

Člen (153) dosadíme do (151) a aproximovanou přenosovou funkci upravíme do tvaru:

$$G_{A1}(s) = \frac{K(2 - \tau_d s)}{s(2 + \tau_d s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s} \quad (154)$$

$$\text{kde: } b_1 = -K, \quad b_0 = \frac{2K}{\tau_d}, \quad a_1 = \frac{2}{\tau_d}$$

Obdobný postup uplatníme také pro přenosovou funkci (152):

$$G_{A2,3}(s) = \frac{K(2 - \tau_d s)}{(\tau s \pm 1)(2 + \tau_d s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (155)$$

$$\text{kde: } b_1 = -\frac{K}{\tau}, \quad b_0 = \frac{2K}{\tau \tau_d}, \quad a_1 = \frac{2\tau \pm \tau_d}{\tau \tau_d}, \quad a_0 = \pm \frac{2}{\tau \tau_d}$$

Pokud se jedná o nestabilní soustavu UFOTDS, je vhodné, aby byla splněna podmínka  $\tau_d < 2\tau$ . Pokud tato podmínka splněna není, je velmi pravděpodobné, že vypočítaný regulátor bude nestabilní.

V simulacích bude porovnán regulační pochod pro regulátory 1DOF a polynom  $d(s)$  bude přednostně volen pomocí metod LQ řízení. Dále zde bude ukázán vliv poruchového signálu ve tvaru skoku.

Pro výpočet koeficientů polynomu  $g(s)$  a parametrů regulátoru můžeme obecně použít stejné vztahy, jaké byly odvozeny v předcházejících kapitolách. V takovém případě si vypočítáme parametry soustavy  $a_1, a_0, b_1, b_0$  zvlášť podle výše uvedených vztahů, a poté s nimi pracujeme stejně jako ve všech předchozích příkladech.

Pokud však navrhujeme aplikaci pro jeden konkrétní typ soustavy, může být výhodné provést následující úpravy:

## SOUSTAVA IDTS:

Výpočet polynomu  $g(s)$ :

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (156)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1 g_3 + \frac{4\varphi}{\tau_d^2}} \quad (157)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + K^2} \quad (158)$$

$$g_0 = \frac{2K}{\tau_d} \quad (159)$$

Pro soustavu ITDS můžeme polynom  $n(s)$  volit pouze jako  $n(s) = (s + \alpha)^{\deg d - \deg g}$  nebo  $n(s) = a^+ = \left(s + \frac{2}{\tau_d}\right)$ .

V následujícím příkladě bude ukázán výpočet regulátoru 1DOF.

Přenos regulátoru předpokládáme obecně ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{s\tilde{p}(s)} = \frac{q_1s + q_0}{s(\tilde{p}_1s + \tilde{p}_0)} \quad (160)$$

Hodnoty koeficientů regulátoru získáme řešením charakteristické rovnice:

$$a(s)sp(s) + b(s)q(s) = d(s) \quad (161)$$

Řešení můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\tau_d} & 1 & -K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\tau_d} & \frac{2K}{\tau_d} & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau_d} & -K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau_d} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_3 \\ \frac{2g_3}{\tau_d} + g_2 \\ \frac{2g_2}{\tau_d} + g_1 \\ \frac{2g_1}{\tau_d} + g_0 \\ \frac{2g_0}{\tau_d} \end{pmatrix} \quad (162)$$

## SOUSTAVA SFOTDS A UFOTDS:

Výpočet polynomu  $g(s)$ :

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (163)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1g_3 + \frac{\varphi}{\tau\tau_d} \left[ \frac{(2\tau \pm \tau_d)^2}{\tau\tau_d} \mp 4 \right]} \quad (164)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{4\varphi}{\tau_d} + K^2 \right)} \quad (165)$$

$$g_0 = \frac{2K}{\tau\tau_d} \quad (166)$$

Při volbě polynomu  $d(s)$  pro systémy SFOTDS a UFOTDS lze využít prakticky jakoukoliv z možností uvedených v kapitole 1.3. V následující části bude ukázán návrh regulátorů 1DOF pro polynom  $d(s)$  zvolený ve tvaru:

$$d(s) = (g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0)(s + \alpha) \quad (167)$$

Pro volbu (167) jsou stupně polynomu  $p(s)$ ,  $q(s)$  stejné jako při návrhu pro soustavu ITDS.

Přenos regulátoru opět předpokládáme ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{s\tilde{p}(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{s(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)} \quad (168)$$

Řešení můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\tau \pm \tau_d}{\tau\tau_d} & 1 & -\frac{K}{\tau} & 0 & 0 \\ \pm \frac{2}{\tau\tau_d} & \frac{2\tau \pm \tau_d}{\tau\tau_d} & \frac{2K}{\tau\tau_d} & -\frac{K}{\tau} & 0 \\ 0 & \pm \frac{2}{\tau\tau_d} & 0 & \frac{2K}{\tau\tau_d} & -\frac{K}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau\tau_d} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_3 \\ \alpha g_3 + g_2 \\ \alpha g_2 + g_1 \\ \alpha g_1 + g_0 \\ \alpha g_0 \end{pmatrix} \quad (169)$$

Jako ukázkové příklady byly zvoleny následující tři přenosy soustav IDTS (151), SFOTDS (152a) a UFOTDS (152b):

$$G_1(s) = \frac{0,2}{s} e^{-2s} \quad (170)$$

$$G_2(s) = \frac{0,5}{2s+1} e^{-4s} \quad (171)$$

$$G_3(s) = \frac{0,5}{2s-1} e^{-1s} \quad (172)$$

V simulacích je ukázán také vliv poruchové veličiny ve tvaru skoku, která působí na vstup regulované soustavy. Parametry poruchového signálu:

$$v(t) = 0 \text{ pro } t < 30 \quad (173)$$

$$v(t) = -0.2 \text{ pro } t \geq 30 \quad (174)$$



## 5.5 Příklady regulace pro speciální tvary žádané veličiny

V této kapitole bude ukázán příklad regulačního pochodu, kdy je žádaná veličina nebo porucha jiného typu než skoková funkce. Pro ukázkou byl vybrán vstupní signál ve tvaru harmonické funkce.

Pokud je žádaná hodnota nebo porucha harmonickou funkcí, předpokládáme jejich přenosy ve tvaru:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} = \frac{h_w(s)}{s^2 + \omega_w^2}, \quad V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} = \frac{h_v(s)}{s^2 + \omega_v^2} \quad (175)$$

Postup při návrhu regulátorů pomocí polynomiální metody pro vstupní signály ve tvaru harmonické funkce je obdobný jako při návrhu regulátorů pro skokové funkce. Vztahy potřebné pro návrh regulátoru byly uvedeny v kapitolách 1.2 a 1.2.

Pro ukázkou regulace byly vybrány dva typy regulovaných soustav:

- Integrační stabilní soustava s neminimální fází:

$$G(s) = \frac{-s + 3}{s^2 + 2s} \quad (176)$$

- Nestabilní soustava 2. řádu s minimální fází:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 - s - 2} \quad (177)$$

V simulacích je uvažována žádaná hodnota ve tvaru sinusového signálu:

$$w(t) = 2 \sin(0,5t) \quad (178)$$

a poruchová veličina ve tvaru sinusového signálu:

$$w(t) = 0,5 \sin(2t) \quad \text{pro } t \geq 35 \quad (179)$$

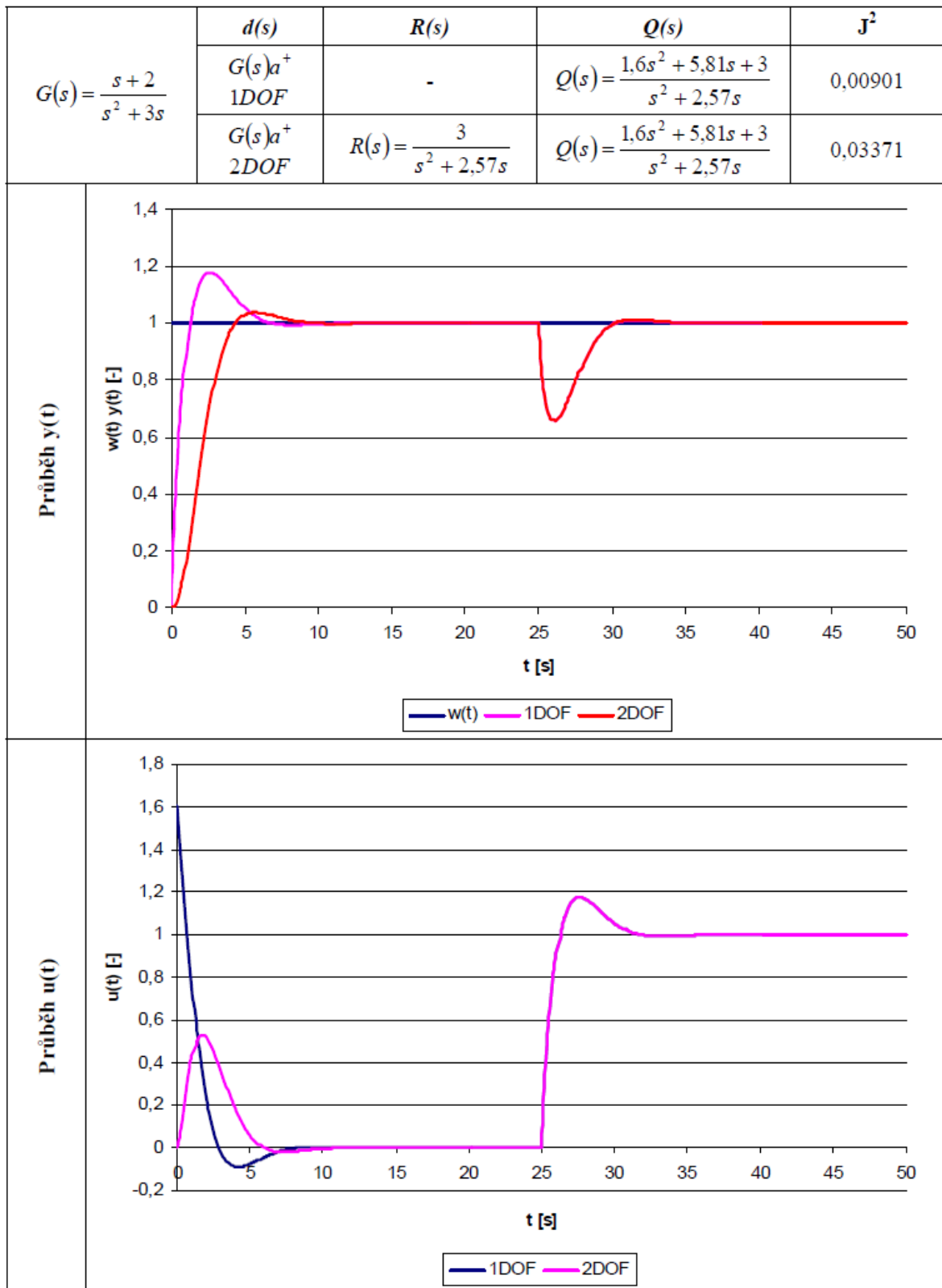
K regulaci byly použity regulátory typu 1DOF a 2DOF a polynom  $d(s)$  byl zvolen:

$$d(s) = g(s)(a^+)^{\deg d - \deg g} \quad (180)$$

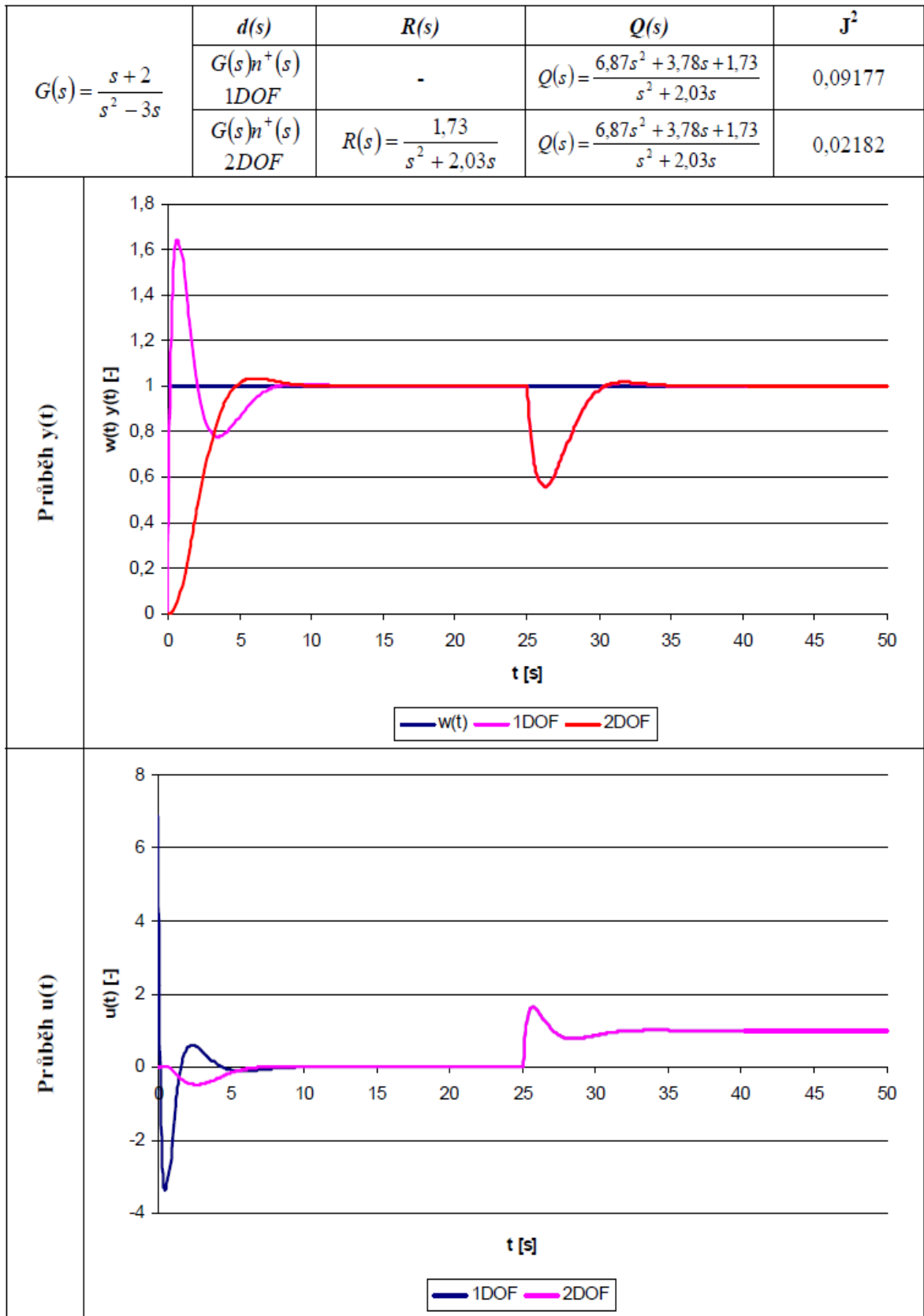
V poslední simulaci je porovnán regulační pochod pro soustavu (177), kdy je polynom  $d(s)$  volen jako (180) a (41) - tj. jako vícenásobný reálný kořen.

$$d(s) = (s + 1)^7 \quad \text{a} \quad d(s) = (s + 2)^7 \quad (181)$$

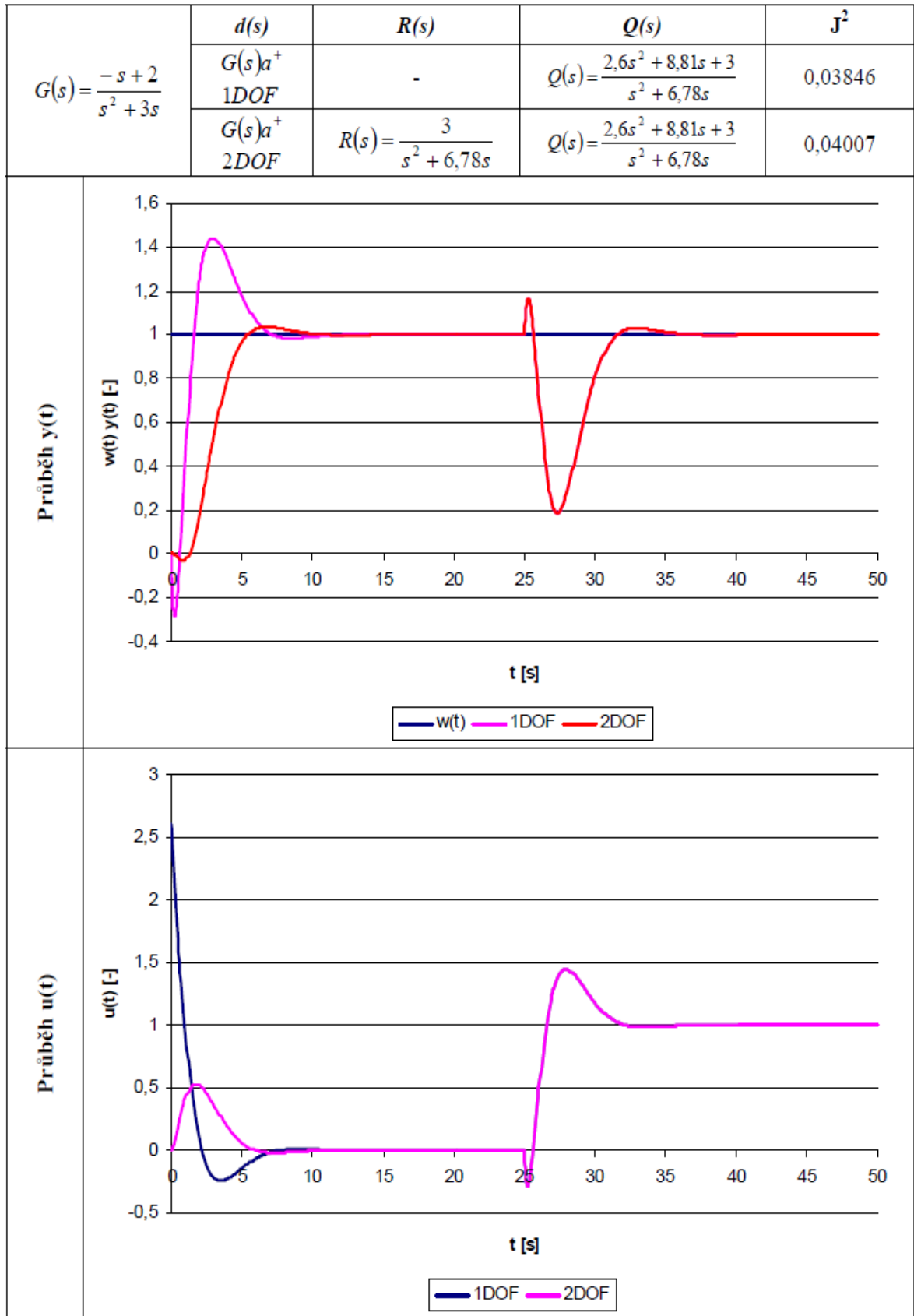
## 5.6 Simulace regulačních pochodů pro soustavy uvedené v kapitolách 5.2 – 5.3.



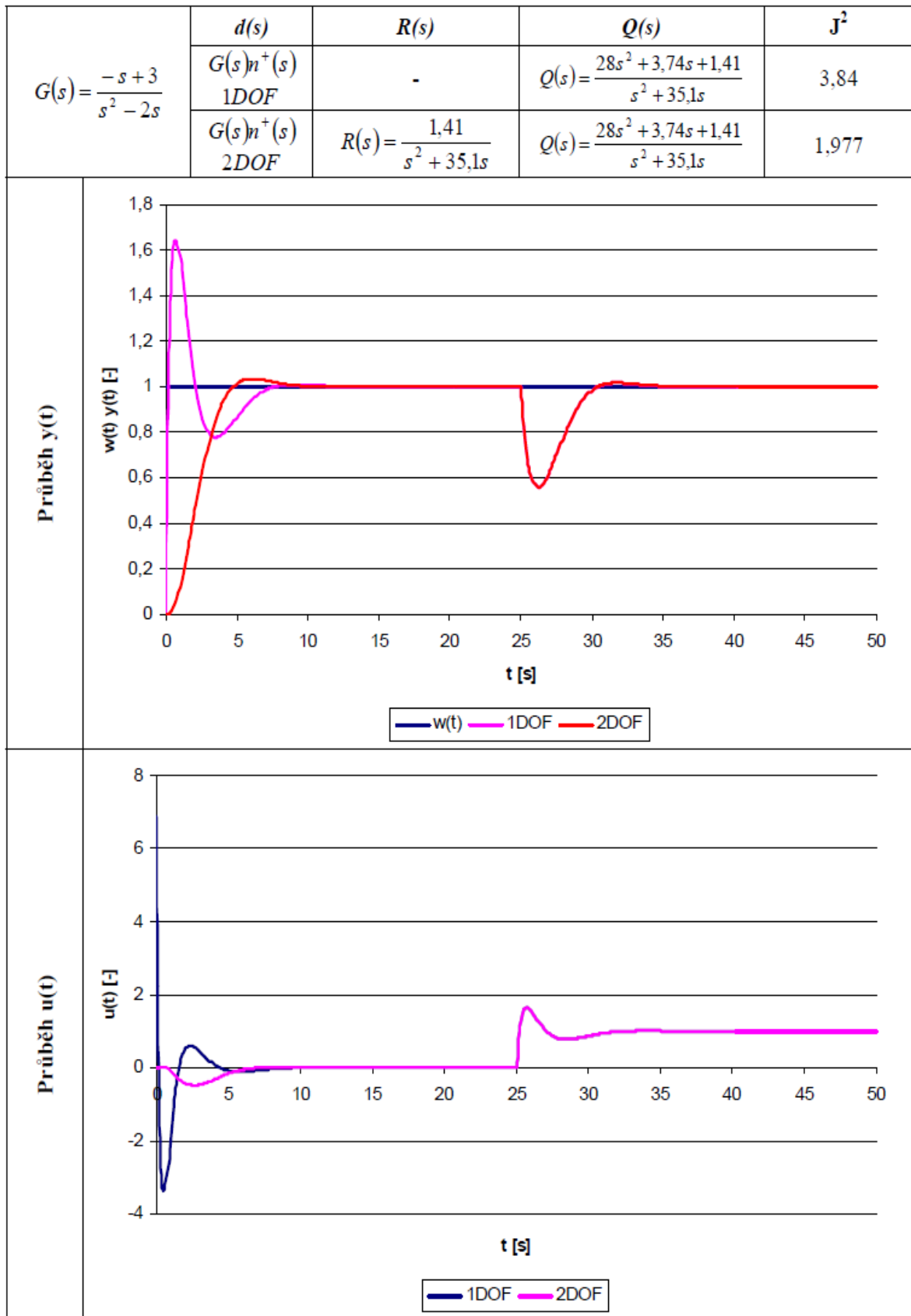
Obr. 4 – Stabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)a^+$

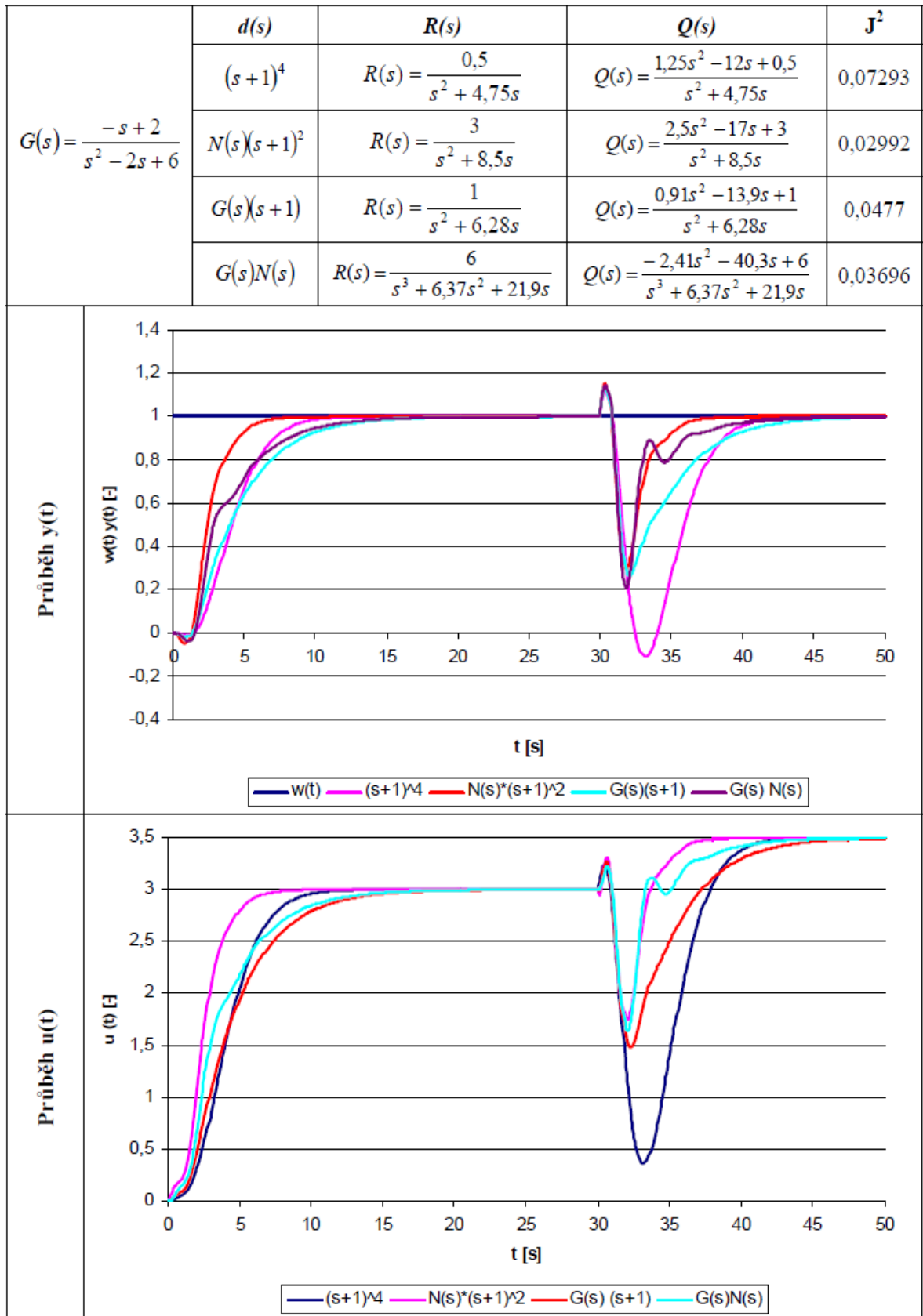


Obr. 5 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)n(s)$

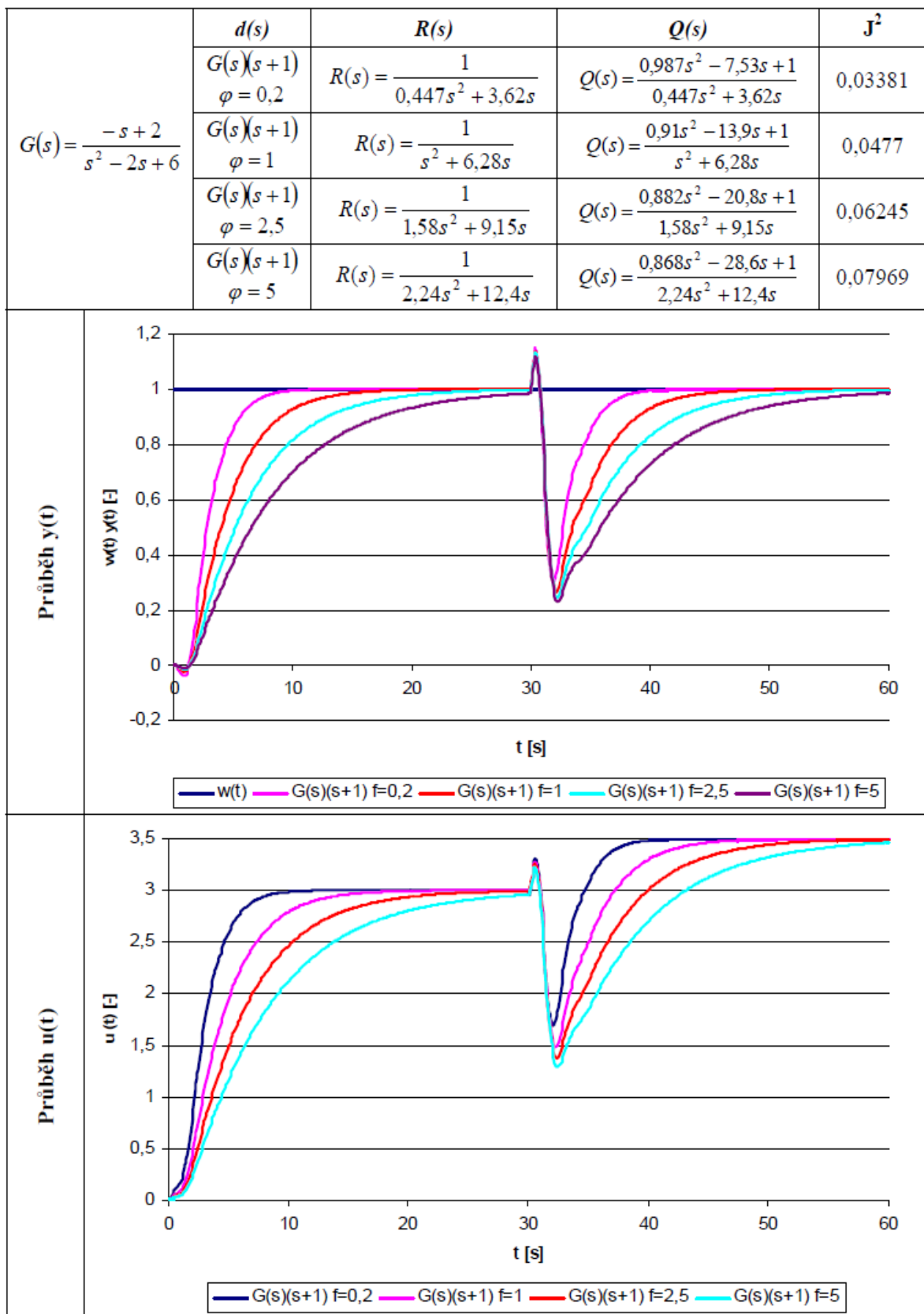


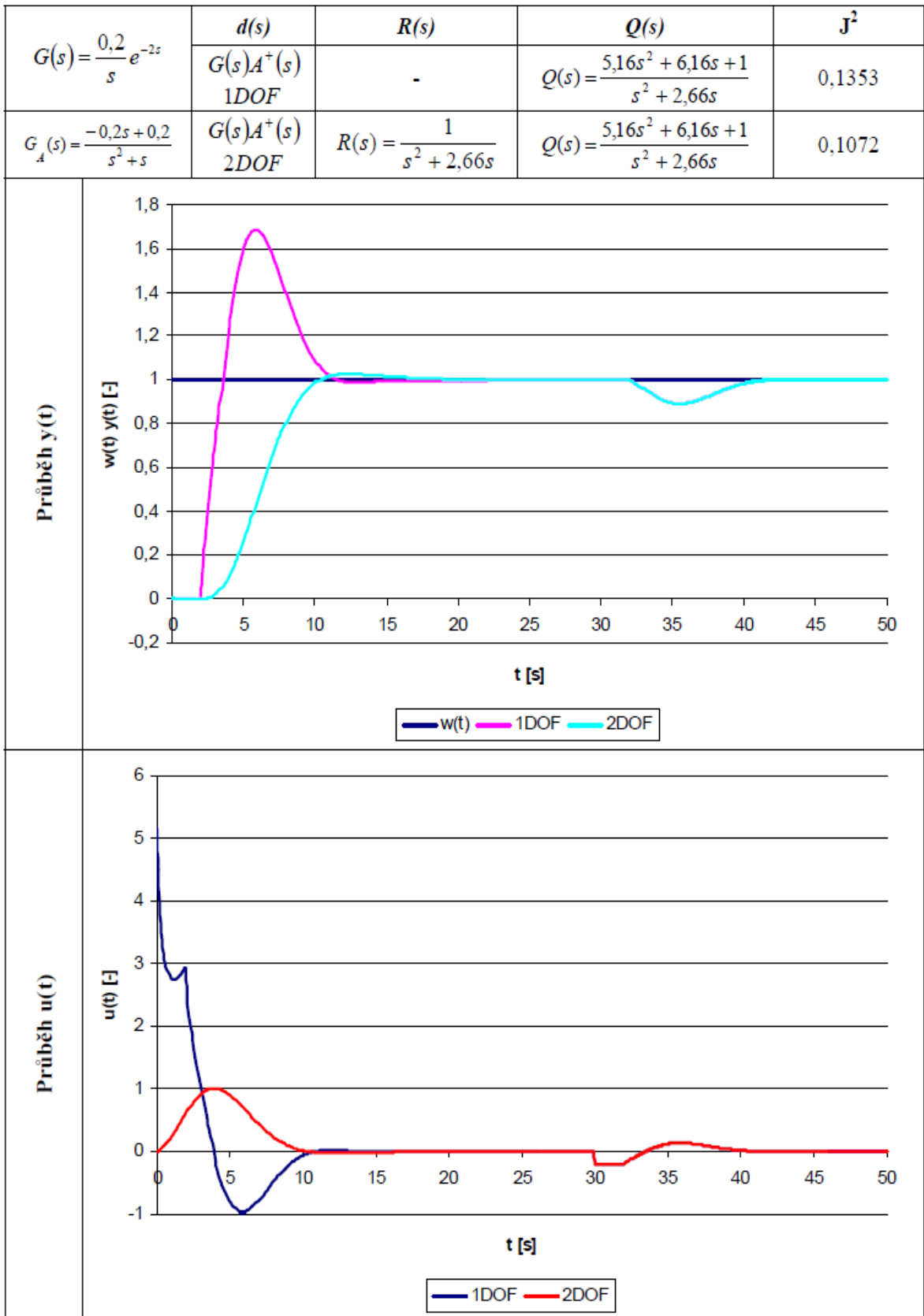
Obr. 6 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)a^+$


 Obr. 7 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)n(s)$



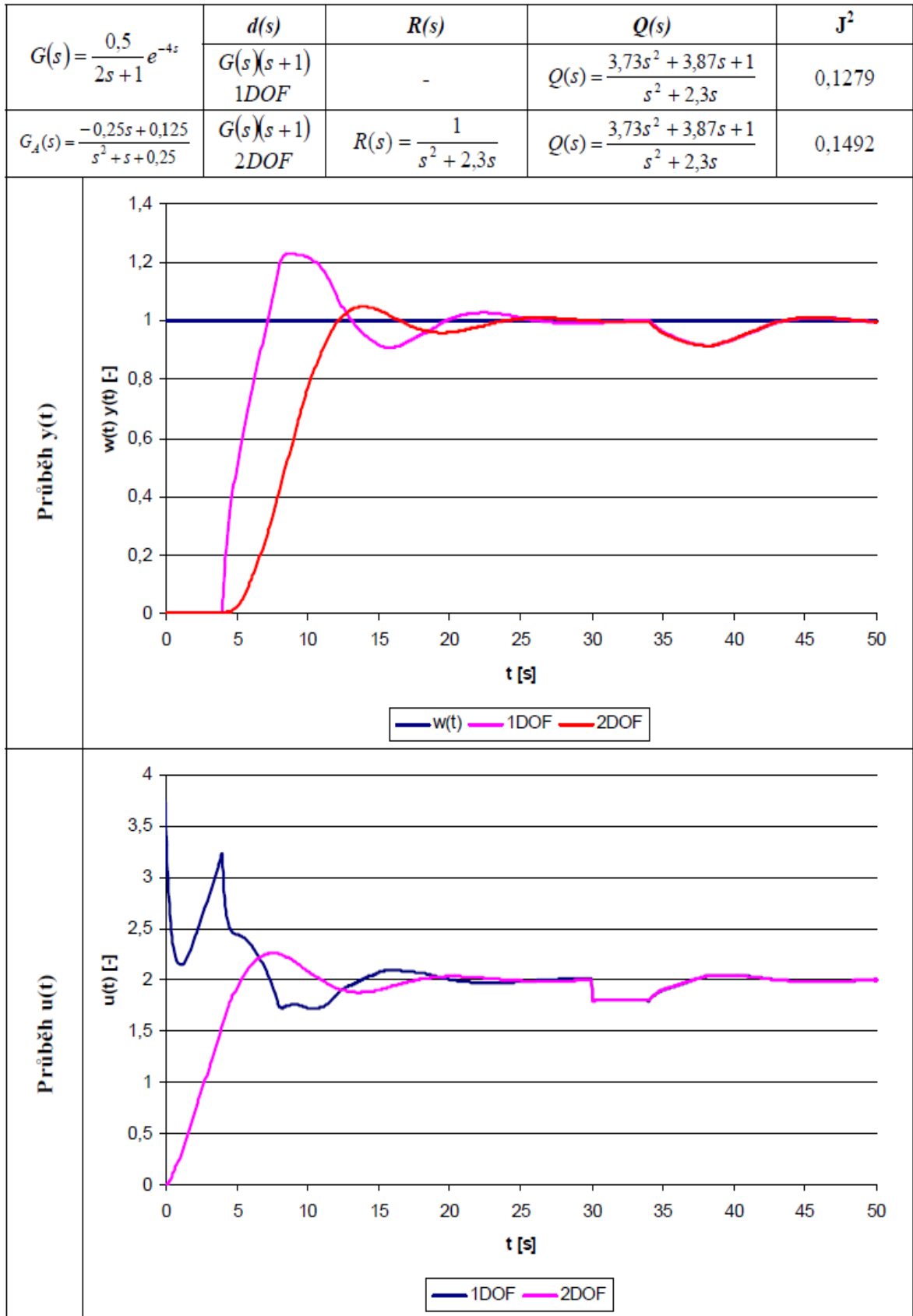
Obr. 8 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází


 Obr. 9 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází – vliv parametru  $\varphi$

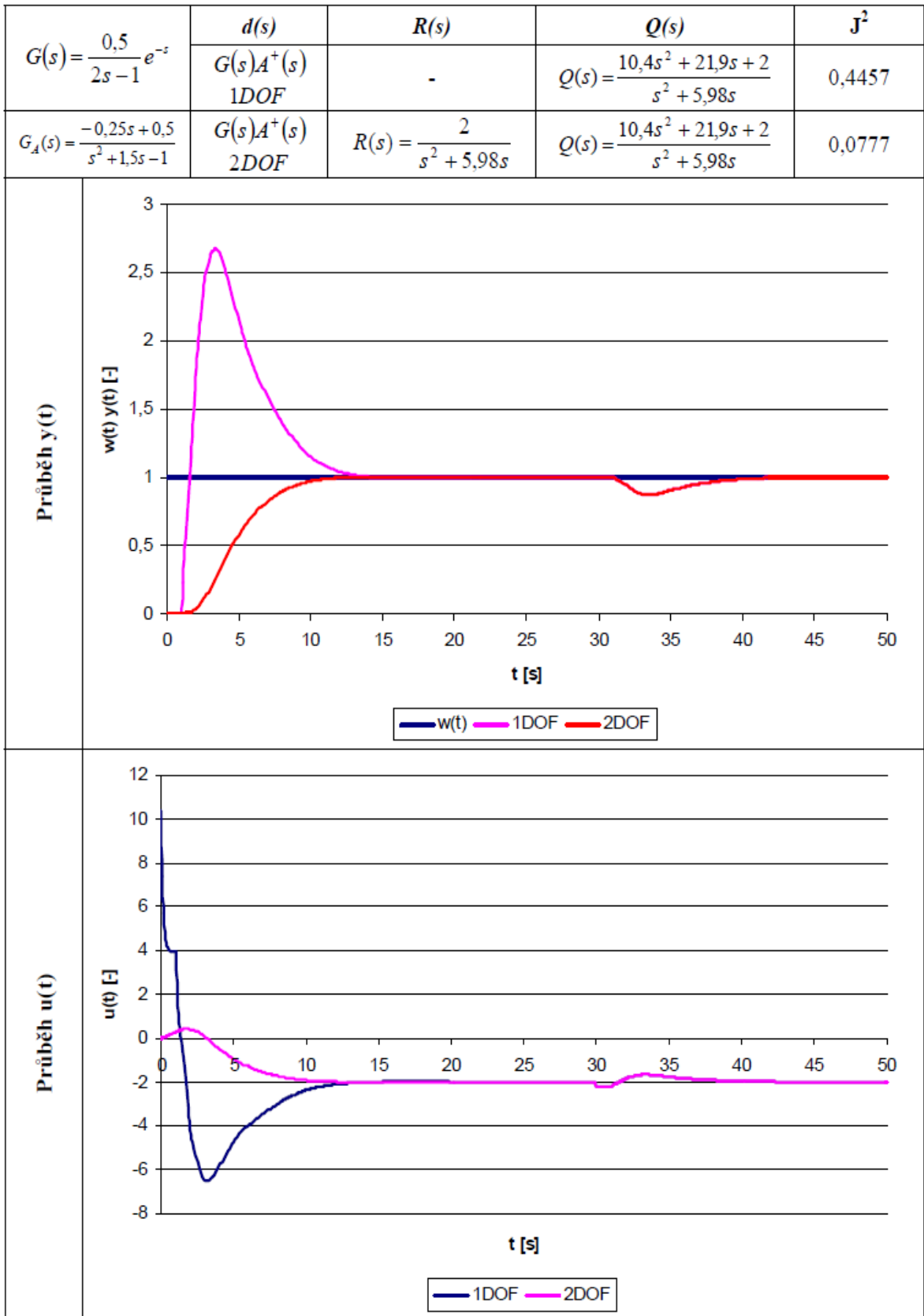


Obr. 10 - Integrovní soustava s dopravním zpožděním

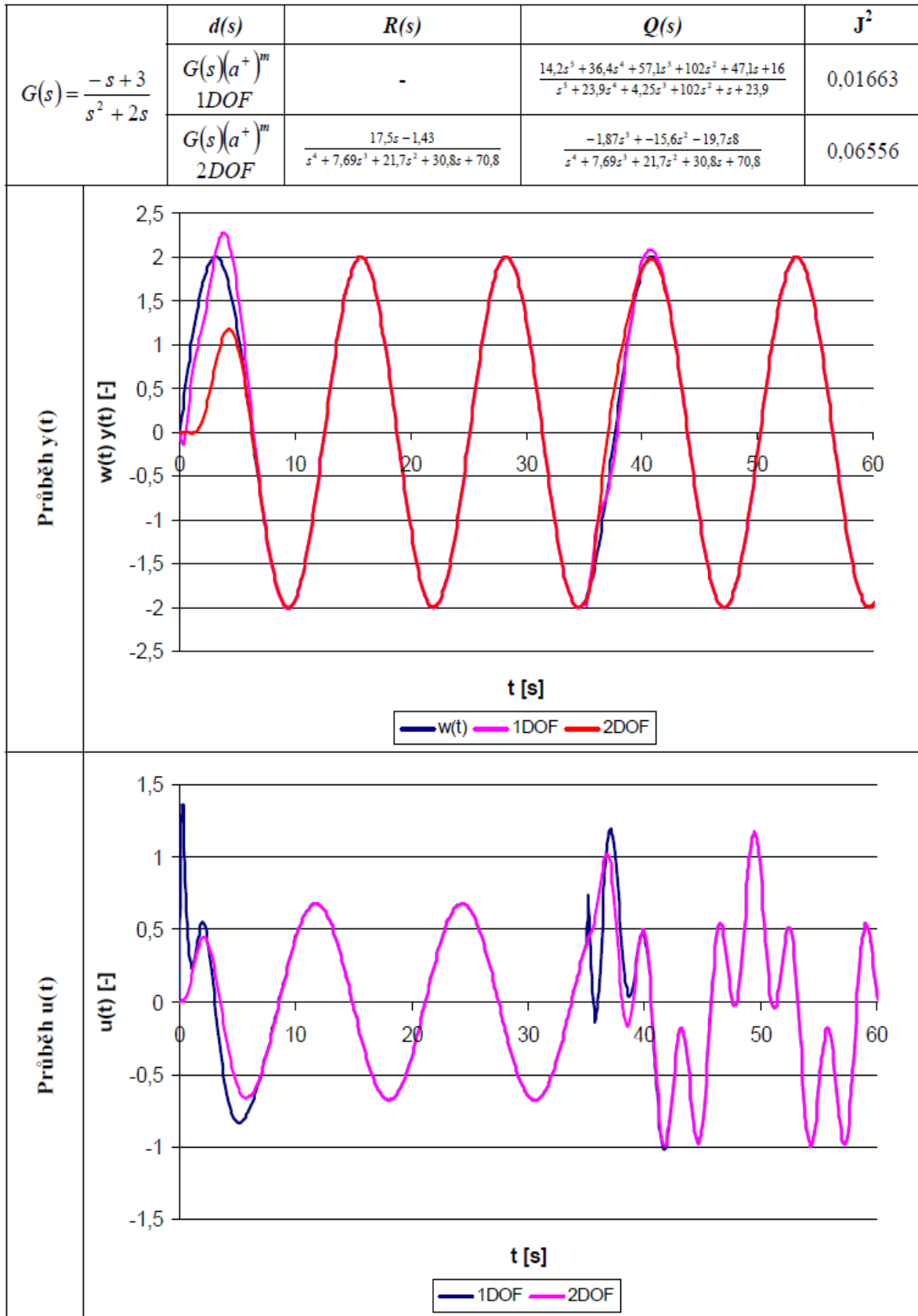




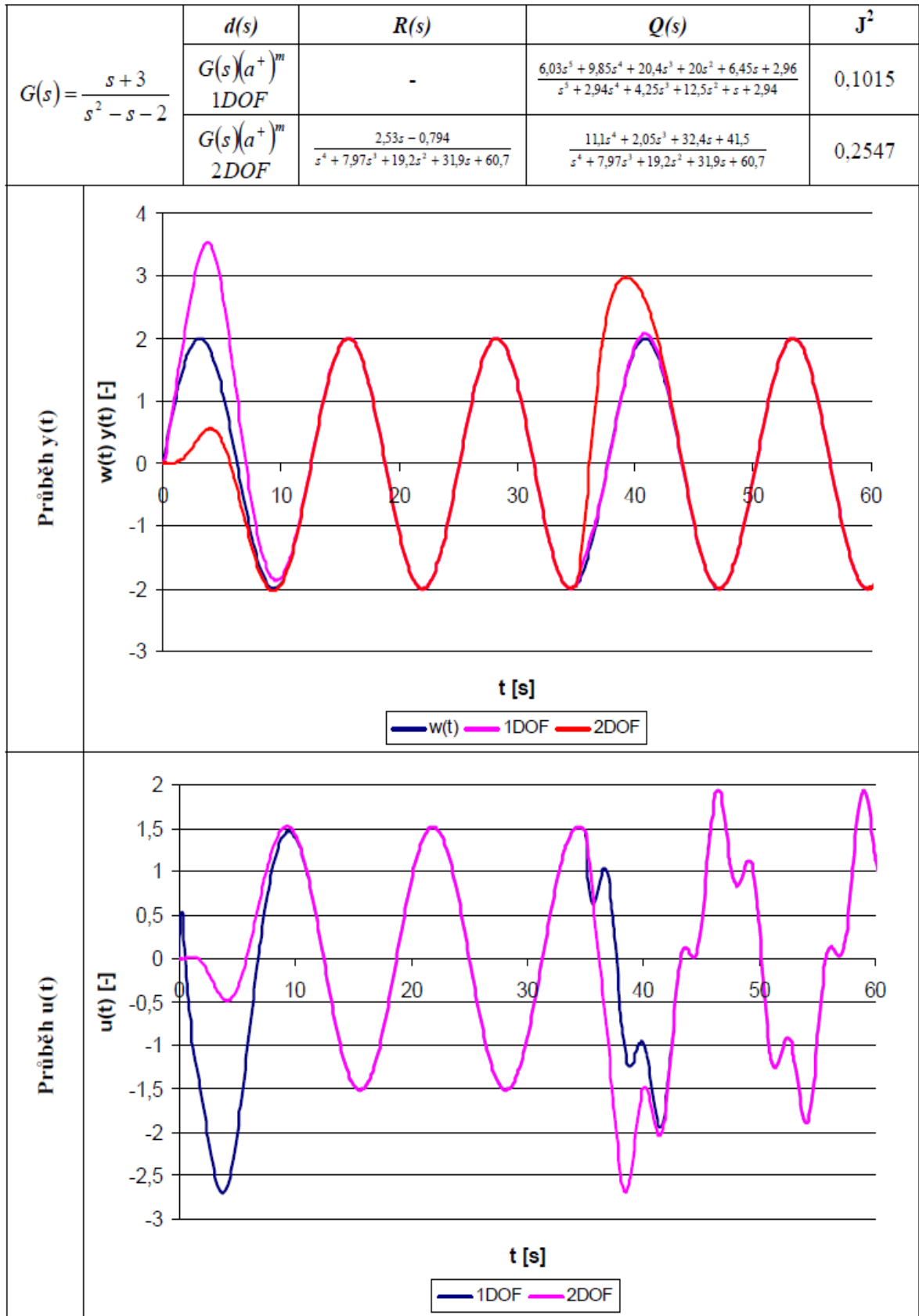
Obr. 11 – Stabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním



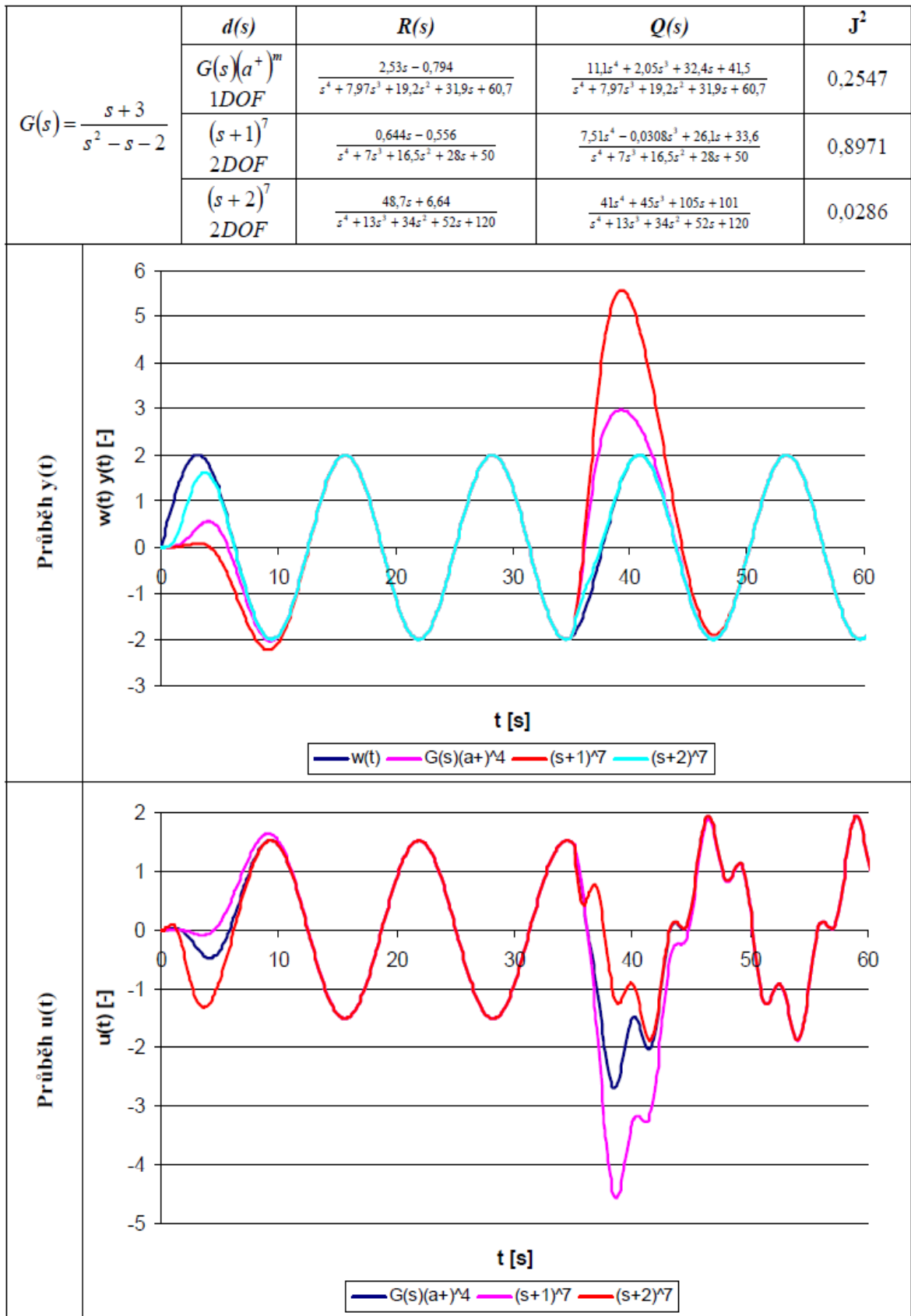
Obr. 12 – Nestabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním



Obr. 13 – Integrovní stabilní soustava s neminimální fází



Obr. 14 – Nestabilní soustava 2. řádu s minimální fází



Obr. 15 – Nestabilní soustava 2. řádu s minimální fází – vliv volby polynomu d(s)

## ZÁVĚR

Z provedených simulací je patrné, že polynomiální metody syntézy umožňují relativně snadno navrhnout regulátory i pro soustavy nestabilní, integrační, neminimálně-fázové, s dopravním zpožděním, apod., tedy pro soustavy, které jsou konvenčními typy regulátorů prakticky neřiditelné. Na druhou stranu se však i u těchto metod objevují některé nevýhodné vlastnosti. Jedná se především o skutečnost, že pro některé typy nestabilních soustav nelze jednoduchým způsobem určit polynom  $d(s)$  tak, abychom získali stabilní regulátor, což omezuje použitelné typy regulátorů pouze na konfiguraci 1DOF.

Další nevýhodou, i když jen v určitém smyslu slova, je silná závislost kvality regulačního pochodu jak na volbě polynomu  $d(s)$ , tak také na použité konfiguraci systému řízení. Nevýhodou v tomto případě je skutečnost, že zpravidla nelze dopředu říci, jaká konfigurace či polynom  $d(s)$  budou pro daný typ soustavy nejvýhodnější.

Obecně například platí, že konfigurace 1DOF dává rychlejší regulační pochod, ovšem za cenu velkých počátečních akčních zásahů, které nemusejí být v praxi realizovatelné. Naopak při použití konfigurace 2DOF platí, že regulační pochody jsou sice poněkud pomalejší, ale zpravidla bez výrazných překmitů a dále také akční zásahy jsou mnohem lépe realizovatelné. Zdálo by se tedy, že použití regulátorů 1DOF nemá v praxi smysl, protože regulátory 2DOF mají výrazně lepší vlastnosti. Bohužel, toto není tak docela pravda, protože v některých případech nelze regulátory 2DOF vůbec použít. Dále se například ukazuje, pokud je žádaná hodnota ve tvaru harmonické funkce, může být výhodnější použít regulátor konfigurace 1DOF, protože je tak regulační pochod rychlejší a akční zásah je realizovatelný prakticky stejně jako při použití regulátorů 2DOF.

K podobným závěrům dojdeme také při posuzování vhodnosti jednotlivých způsobů volby polynomu  $d(s)$ , kdy zjišťujeme, že často záleží nejen na typu regulované soustavy, ale i na hodnotě koeficientů přenosu. Snadno tak můžeme zjistit, že použití metod LQ řízení vede u některých soustav k vynikajícím výsledkům, zatímco u jiných dosáhneme stejně kvalitního nebo i kvalitnějšího regulačního pochodu při použití vícenásobného reálného kořenu.

Klasickým příkladem je poslední simulační experiment, kdy byla posuzována kvalita regulačního pochodu pro různé volby polynomu  $d(s)$ . Byl zde porovnáván polynom navržený metodou LQ řízení s polynomy s vícenásobným reálným pólem pro různé hodnoty parametru  $\alpha$ . V daném případě je patrné, že polynom navržený metodou LQ řízení poskytuje výrazně kvalitnější regulační pochod než polynom  $(s+1)^7$ , ale výrazně horší než polynom  $(s+2)^7$ . Současně se ale ukazuje určitá nevýhoda volby vyšších hodnot koeficientů  $\alpha$ , která vede k vyšším hodnotám koeficientů v čitateli přenosu regulátorů, což může způsobovat problémy např. s odolností regulátorů proti šumu. Navíc pro některé typy soustav vzrůstá se zvyšováním  $\alpha$  riziko, že vypočítaný regulátor bude nestabilní. Metody LQ řízení toto riziko v mnoha případech výrazně snižují.

Lze tedy konstatovat, že metody LQ řízení představují minimálně vhodný kompromis a zpravidla poskytují velmi kvalitní regulační pochody.

Dále také platí, že uvedené metody poskytují prakticky vždy lepší regulační pochody než kdybychom použili klasické PID regulátory. Výhody polynomiálních metod se dále násobí při jejich kombinaci s dalšími moderními metodami řízení, jakými jsou například principy adaptivního a prediktivního řízení, umělé inteligence, apod..

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] PROKOP R., MATUŠŮ R., PROKOPOVÁ Z. *Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy*. 1. vydání, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky, 2006, 192s, ISBN 80-7318-369-2.
- [2] KOVÁŘ J. *Učební texty pro předměty automatizace a informatika*, Zlín: Střední průmyslová škola, 2002,2003.
- [3] DOSTÁL P., BOBÁL V., GAZDOŠ F. *Adaptive control of a nonlinear process by two feedback controllers*. In: 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, Limassol, Cyprus, 2005, 946-951 ISBN 0-7803-8937-9.
- [4] DOSTÁL P. *Učební texty pro předmět Stavová a algebraická teorie řízení, část 2.*, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky, 2006.
- [5] DOSTÁL P., GAZDOŠ F., BOBÁL V. *Design of controllers for processes with time delay by polynomial method*. In: European Control Conference ECC'2007, Kos, Greece, 2007, ISSN 4540-4545.
- [6] KUČERA V. *Diophantine equations in control – a survey*. Automatica 29, 1361-1375, (1993), ISSN: 0005-1098.
- [7] HUNT K. J., ŠEBEK M., KUČERA, V. "H<sub>2</sub> control problems," in *Polynomial methods in optimal control and filtering*. K.J. Hunt, Ed. London: Peter Peregrinus Ltd., (1993).
- [8] DOSTÁL P., GAZDOŠ F., BOBÁL V. *Design of controllers for time delay systems Part II: Integrating and unstable systems*. Journal of Electrical Engineering, Vol. 59, No 1, 2008, 3-8 ISSN 1335-3632.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

1DOF      One Degree of Freedom

2DOF      Two Degree of Freedom

ITDS      The Integrating Time Delay System

SFOTDS    The Stable First Order Time Delay System

UFOTDS    The Unstable First Order Time Delay System



**SEZNAM OBRÁZKŮ**

<i>Obr. 1 – 1DOF konfigurace systému řízení</i> .....	5
<i>Obr. 2 – 2DOF konfigurace systému řízení</i> .....	7
<i>Obr. 3 – Program Controler_1DOF_2DOF.m</i> .....	26
<i>Obr. 4 – Stabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)a^+</math></i> .....	34
<i>Obr. 5 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)n(s)</math></i> .....	35
<i>Obr. 6 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)a^+</math></i> .....	36
<i>Obr. 7 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)n(s)</math></i> .....	37
<i>Obr. 8 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází</i> .....	38
<i>Obr. 9 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází – vliv parametru <math>\varphi</math></i> .....	39
<i>Obr. 10 - Integrační soustava s dopravním zpožděním</i> .....	40
<i>Obr. 11 – Stabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním</i> .....	41
<i>Obr. 12 – Nestabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním</i> .....	42
<i>Obr. 13 – Integrační stabilní soustava s neminimální fází</i> .....	43
<i>Obr. 14 – Nestabilní soustava 2. řádu s minimální fází</i> .....	44
<i>Obr. 15 – Nestabilní soustava 2. řádu s minimální fází – vliv volby polynomu <math>d(s)</math></i> .....	45

## SEZNAM PŘÍLOH

P I Elektronické přílohy a verze práce na CD