

# Simulace systému sběrač – trolejové vedení v prostředí Matlab/Simulink

## 1. Úvod

Jednou z možností, jak úspěšně navrhovat změny parametrů trolejového vedení, je využití simulace. Tento způsob byl v Československu zkoušen v 70. letech na analogových počítačích. I když výsledky byly nadějně, v práci se dále nepokračovalo. Jednak pro praktickou nepotřebnost, protože při tehdejší jízdní rychlosti 120 km/h nebylo s trakčním vedením mnoho problémů. Jednak pro omezení, daná malým počtem integračních jednotek i funkčních generátorů analogových počítačů, což neumožňovalo model dále zdokonalovat a tím jej využít k jiným účelům, než k přibližnému nalezení rezonanční rychlosti. Pro osobní počítače a odpovídající výpočetní prostředky již tato omezení přes deset let neplatí.

## 2. Model trolejového vedení

Pokud nehledíme na trolejové vedení jako na kontinuum, je vhodné použít upravený model podle Kumezawy a Pascucciho [1]. Řešení pomocí teorie kmitání kontinua by vyžadovalo zcela jiný matematický i programový aparát, nehledě na to, že její použití je nutné pouze v případě rychlostí blízkých rychlosti šíření vlny po vedení.

vstupními údaji tohoto modelu jsou:

- $b$  tlumení trolejového vedení
- $k(t)$  tuhost trolejového vedení
- $m_{ef}(t)$  efektivní hmotnost úseku trolejového vedení, který kmitá spolu se sběračem

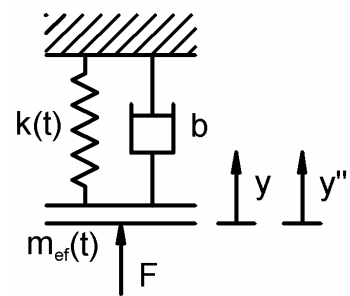
výstupními údaji – po spojení s modelem sběrače jsou:

- $F$  okamžitá velikost přítláčné síly
- $y$  svislá souřadnice kontaktního bodu

Odpovídající diferenciální rovnice má tvar:

$$m_{ef}(t)\ddot{y} = F - k(t)y - b\dot{y} \quad (1)$$

Hmota trolejového vedení, která kmitá společně s ližinami sběrače, a především tuhost vedení není konstantní. Tuhost bývá v blízkosti stožáru největší, uprostřed rozpětí naopak nejmenší, při pohybu sběrače se tedy jedná o závislost okamžité hodnoty tuhosti trolejového vedení na dráze. Vzhledem k řešení diferenciálních rovnic, které se provádí většinou v časové oblasti, je vhodné provést převod jednoduchým vzorcem  $t=l/v$  ( $l$  je stožárové rozpětí,  $v$  je rychlost jízdy). Jak na obrázku, tak v rovnicích jsou použity již časové závislosti.

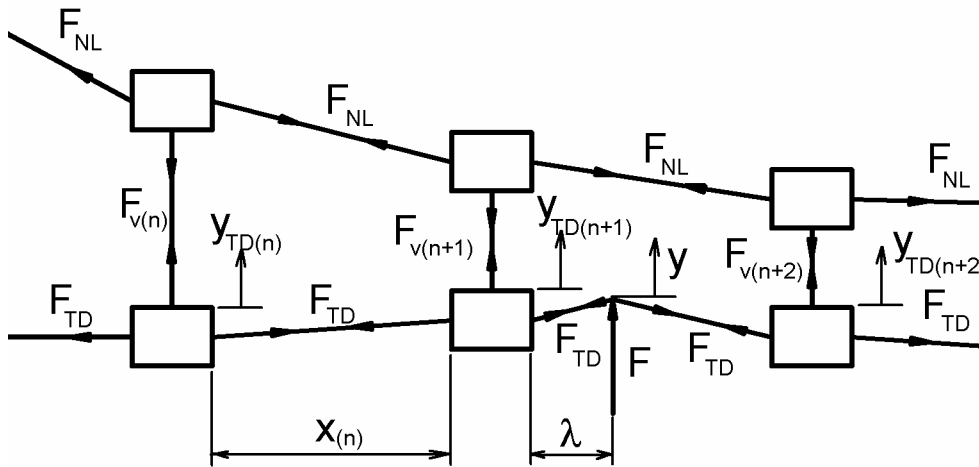


Obr. 1 Model dynamického chování TV

### 2.1. Výpočet vstupních parametrů pro model

Trolejové vedení je z pohledu projektanta charakterizováno především konstrukčními parametry jako délka rozpětí, tahy v lanech, průřezy vodičů atd., model je však sestaven pomocí parametrů fyzikálních  $m$ ,  $k$ ,  $b$  atd. Vztahy mezi nimi lze zjistit pro kterékoliv místo trolejového vedení měřením, případně bez nutnosti realizace vedení pomocí vzorců, které ovšem existují jen pro některá typická místa (u závěsu, uprostřed rozpětí). Poměrně přesné průběhy lze určit opět pomocí modelů, například použitím modelu, rámcově vycházejícího z prací Morrise [1]. Tento model byl původně uvažován pro studium dynamického chování trolejového vedení na principu

diskretizace kontinua. Model (viz *Obrázek 2*) v souladu se skutečností trolejové vedení rozděljuje po jednotlivých věšácích, jimž přiřazuje hmotnost odpovídajícího úseku nosného lana i trolejového drátu. Tyto „elementární hmoty“ jsou vzájemně spojeny silami odpovídajícími tahu v trolejovém drátu a nosném laně. Sběrač je reprezentován silou působící svise vzhůru.



Obr. 2 Model TV pro zjišťování parametrů

vstupními údaji modelu jsou:

$n$	index pořadí věšáku
$m_{NL(n)}$	hmotnost úseku nosného lana, příslušejícího danému věšáku
$m_{TD(n)}$	hmotnost úseku trolejového drátu, příslušejícího danému věšáku
$F$	přítlačná síla sběrače
$F_{NL}$	tah v nosném laně
$F_{TD}$	tah v trolejovém drátě
$y_{0(n)}$	délka věšáku
$x_{(n)}$	vzdálenost věšáků $n$ a $n+1$
$\lambda$	vzdálenost sběrače od věšáku

výstupními údaji jsou:

$y_{TD(n)}$	zdvih trolejového drátu způsobený sběračem
$y_{NL(n)}$	zdvih nosného lana způsobený sběračem, $y_{NL(n)}=y_{TD(n)}$ , pokud $F_{v(n)}>0$
$y$	zdvih v místě sběrače
$F_{v(n)}$	síla napínající věšák

Je zřejmé, že z těchto výstupních údajů lze snadno vypočítat tuhost trolejového vedení v místě působící síly, určeném  $n$ ,  $\lambda$ :

$$k = F / y \quad (2)$$

Lze určit také efektivní hmotnost vedení, kmitající spolu se sběračem:

$$m_{ef} = \frac{\sum_n m_{TD(n)} \cdot y_{TD(n)} + m_{NL(n)} \cdot y_{NL(n)}}{y} \quad (3)$$

Tento model tedy umožňuje výpočet fyzikálních parametrů vedení z parametrů konstrukčních. Základní rovnice pro elementární hmotu nosného lana:

$$F_{NL} \cdot \left( \frac{y_{(n-1)} + y_{0(n-1)} - y_{(n)} - y_{0(n)}}{x_{(n-1)}} + \frac{y_{(n+1)} + y_{0(n+1)} - y_{(n)} - y_{0(n)}}{x_{(n)}} \right) - m_{NL(n)} g - F_{v(n)} = 0 \quad (4)$$

a pro elementární hmotu trolejového drátu:

$$F_{TD} \cdot \left( \frac{y_{(n-1)} - y_{(n)}}{x_{(n-1)}} + \frac{y_{(n+1)} - y_{(n)}}{x_{(n)}} \right) - m_{TD(n)}g + F_{v(n)} = 0 \quad (5)$$

Nejvhodnější je řešení maticové. Nejprve se určí délky věšáků z výše uvedených rovnic za podmínky, že na vedení nepůsobí vnější síly a trolejový drát je vyregulován do roviny ( $y_{(n)}=0$ ). Poté je třeba do matice doplnit řádek a sloupec odpovídající působící svislé síle  $F$  a její odlehlosti od nejbližší elementární hmoty  $\lambda$ . Hodnoty  $F_{v(n)}$  mají význam pouze kontrolní. Vyjde-li síla záporná, znamená to, že došlo k pokrčení věšáku (v praxi poměrně běžné, je-li sběrač v blízkosti prvního věšáku u stožáru). Z matice je třeba pro konečný výpočet vyřadit odpovídající člen  $F_{v(n)}$ , neboť věšák je schopen přenést pouze síly kladné. Celý postup lze provádět poměrně snadno pomocí maticových operací a automatizovat pomocí skriptu, v této práci jej však nelze rozebírat podrobněji.

## 2.2. Měření parametrů trolejového vedení

Existuje řada metod zjišťování požadovaných charakteristik vedení, od nejjednodušších mechanických až po složité, například použití měřicího vozu. Pro měření nejdůležitějšího fyzikálního parametru – pružnosti, resp. tuhosti vedení se používá tenzometrického, který umožňuje měření závislosti *zdvih trolejového drátu – přitlačná síla*. Efektivní hmotnost vedení se neměří přímo. K jejímu zjištění je třeba znát hodnotu tuhosti a rezonančního kmitočtu vedení s následným využitím vzorce

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{ef}}} \quad (6)$$

Rezonanční kmitočet vedení lze zjistit z *přechodové charakteristiky*. Ta se získá například zavěšením závaží na šňůře na trolejový drát, přestřížením šňůry a oscilografickým záznamem vzniklých svislých kmitů trolejového drátu.

## 3. Model sběrače

Sběrač sestává z pákového mechanismu, který přenáší konstantní sílu zdvihacího vzduchového válce na smykadlo. Pákový mechanismus opět představuje určitou hmotu, stejně jako smykadlo. Na smykadle jsou přes tzv. sekundární odpružení připevněny ližiny. Fyzikální model sběrače, zohledňující i sekundární odpružení, poprvé použil ve svých teoretických pracích Morris [5]; kinematické schéma je následující:

vstupními údaji modelu jsou:

$M_{sb}$  redukovaná hmotnost mechanismu sběrače

$M_w$  neodpružená hmotnost smykadla (hmotnost ližin)

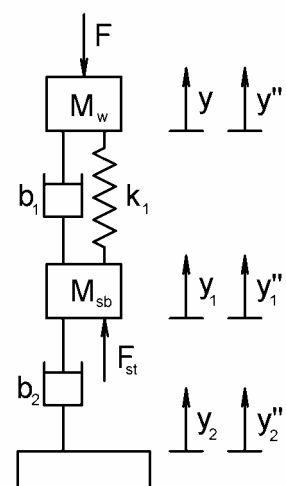
$y_2(t)$  svislá souřadnice střechy vozidla, závislá např. na nerovnostech trati

$F_{st}$  síla vyvozená vzduchovým válcem

$k_1$  tuhost pružin sekundárního odpružení

$b_1$  tlumení sekundárního odpružení

$b_2$  tlumení zdvihacího mechanismu sběrače



Obr. 3 Model sběrače

výstupními údaji ve spojení s modelem trolejového vedení jsou:

- $F$  okamžitá přítláčná síla
- $y$  svislá souřadnice kontaktního bodu
- $y_1$  svislá souřadnice horního kloubu ramen sběrače

Odpovídající diferenciální rovnice:

$$M_{sb}\ddot{y}_1 = F_{st} + k_1(y - y_1) + b_1(\dot{y} - \dot{y}_1) + b_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1) \quad (7)$$

$$M_w\ddot{y} = -F + k_1(y_1 - y) + b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}) \quad (8)$$

### 3.1. Měření parametrů sběrače

Vstupní parametry modelu sběrače jsou parametry fyzikálními (hmotnost, tuhost, konstanta tlumení), které lze snadno změřit běžnými metodami. Při provozu vyššími rychlostmi se však u každého sběrače začne projevovat aerodynamické zvýšení střední přítláčné síly  $F_M$ :

$$F_M = F_{st} + F_{aer} \quad (9)$$

Hodnota  $F_{aer}$  je závislá na kvadrátu rychlosti a je charakterizována koeficientem  $\alpha$ :

$$F_M = F_{st} + \alpha \cdot v^2 \quad (10)$$

Norma [2] uvádí požadovanou hodnotu  $\alpha=0,97 \cdot 10^{-3}$ , kterou ovšem splňují jen nekvalitnější sběrače používané na vysokorychlostních jednotkách v zahraničí. U nás používané sběrače vzhledem ke kvalitě aerodynamické kompenzace této hodnoty nedosahují (naměřeno  $\alpha=1,25 \cdot 10^{-3}$  až  $4,0 \cdot 10^{-3}$ ).

## 4. Simulace

Jak již bylo uvedeno, výstupními veličinami simulace spolupůsobení trolejového vedení a sběrače jsou především:

- **okamžitá hodnota polohy kontaktního bodu  $y$ ,**
- **okamžitá hodnota velikosti přítláčné síly  $F$ .** Požadavky na průběh přítláčné síly uvádí norma EN 50 367. Jsou vyjádřeny parametry  $F_M$  (střední hodnota přítláčné síly),  $\sigma$  (směrodatná odchylka přítláčné síly),  $F_{min}$  (statistické minimum přítláčné síly) a  $F_{max}$  (statistické maximum přítláčné síly).

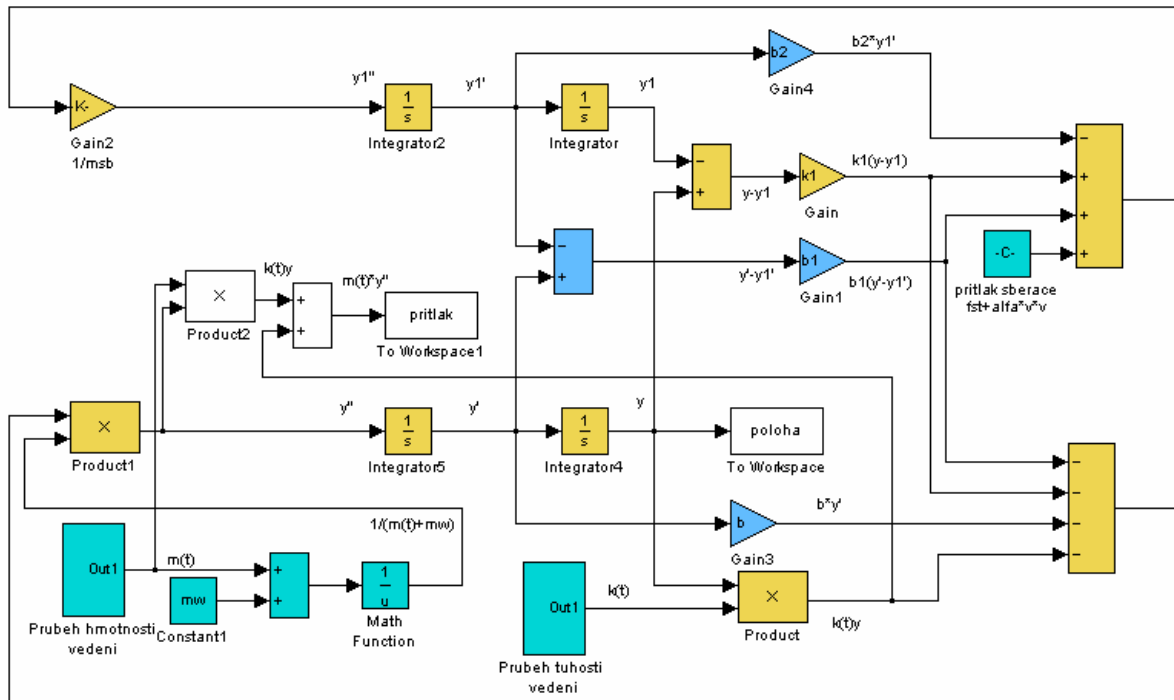
### 4.1. Implementace modelu do prostředí Simulink

Rovnice 1, 7 a 8 jsou simultánní (soudobé). Za předpokladu, že nedochází k odskokům, je lze použít jako matematický popis spolupráce trolejového vedení a sběrače. Vlastní sloučení modelů trolejového vedení a sběrače je vhodné provést pomocí společné proměnné okamžité přítláčné síly  $F$ . Po úpravě – pokud zanedbáme, resp. nedefinujeme náhodný pohyb skříně vozidla – obdržíme soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého stupně o dvou neznámých:

$$\ddot{y} = \frac{-k(t)y - b\dot{y} - k_1(y - y_1) - b_1(\dot{y} - \dot{y}_1)}{M_w + m_{ef}(t)} \quad (11)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{st} + k_1(y - y_1) + b_1(\dot{y} - \dot{y}_1) - b_2\dot{y}_1}{M_{sb}} \quad (12)$$

Na rozdíl od klasických problémů mechaniky je zřejmé, že rovnice neobsahují žádnou proměnnou budící sílu, pouze konstantní (resp. pouze na rychlosti závislou) přítlačnou sílu  $F_{st}$ . Pohyb soustavy vzniká pouze díky proměnné tuhosti a hmotnosti trolejového vedení. Soustavu lze, za předpokladu znalosti těchto průběhů, snadno řešit postupnou integrací. Výpočtové schéma Simulinku, které obsahuje dvě smyčky zpětné vazby, je uvedeno na obrázku.



Obr. 4 Výpočtové schéma modelu

Žlutě jsou vyznačeny dvě základní smyčky postupné integrace veličin  $y''$  a  $y_1''$  včetně bloků zahrnujících vliv tuhosti trolejového vedení a sekundárního vypružení ližin sběrače. Modrou barvu mají bloky zahrnující vliv tlumení. Zeleně jsou vyznačeny subsystemy a pomocné bloky dodávající vstupní průběhy, tj. průběh hmotnosti trolejového vedení a jeho tuhosti. Je možné použití aproximace pomocí částí sinusovky [1] nebo přesnější způsob pomocí tabulek získaných buď měření, nebo výpočtem podle rovnic (4 a 5). Do skupiny bloků vstupních průběhů patří i blok výpočtu střední přítlačné síly sběrače v závislosti na rychlosti (viz vzorec 10). Bíle jsou vyznačeny pomocné bloky výstupu dat z modelu do proměnných Matlabu.

## 4.2. Verifikace modelu

Vzhledem k tomu, že TÚČD provádí svým měřicím vozem běžná měření pouze pro dvě rychlosti (40 km/h a rychlost traťová), nelze jeho záznamy pro verifikaci použít. Byly proto zvoleny výsledky podrobných měření italských drah, prováděných na konci 60. let s různými variantami vedení a s jemným rychlostním krokem [3]. Tento postup je zcela oprávněný, přihlédneme-li k tomu, že dotčené varianty italských vedení se v hlavních parametrech příliš neliší od sestavy „J“, používané v dnešní době na ČD, jak je patrné z *Tabulky 1*. U sestavy „J“ jsou údaje uvedeny pro typické rozpětí 63 m.

Další překážkou použití českých měření pro verifikaci modelu jsou neznámé hodnoty fyzikálních parametrů u nás používaných sběračů. Naproti tomu italské dráhy při svých výzkumech provedly podrobná měření běžných sběračů, včetně závislosti aerodynamické přítlačné síly na rychlosti jízdy. Údaje jsou opět uvedeny v [3] a bylo je tedy možné zpracovat do modelu.

železniční síť	ČD, sestava „J“		FS 200 km/h, 3 kV		
	parametr (popis, jednotka)	bez přidav. lana	s přidav. lanem	var. č. 1	var. č. 2
$I$ (stožárové rozpětí, m)	63	63	50	50	50
$x_{pl}$ (délka příd. lana, m)	-	6	-	-	-
$e_{stř}$ (střední pružnost, mm/N)	0,38	0,41	0,36	0,32	0,31
$U$ (nerovnoměrnost pružnosti, %)	39	20	39	31	30
$F_{td}$ (tah v trolejovém drátě, kN)	15	15	2×7,5	2×10	2×10
$S_{td}$ (průřez trolejového drátu, mm <sup>2</sup> )	150 Cu	150 Cu	2×100 Cu	2×100 Cu	2×100 Cu
$F_{nl}$ (tah v nosném laně, kN)	15	15	11,25	11,25	13,75
$S_{nl}$ (průřez nosného lana, mm <sup>2</sup> )	120 Cu	120 Cu	120 Cu	120 Cu	120 Cu

Tabulka 1 Parametry českých a italských vedení

Verifikaci za použití parametrů různých italských vedení a sběračů shrnuje následující tabulka.

parametr	rezonanční rychlost (km/h)			amplituda kmitů kontaktního bodu (cm)		
	vedení	FS var. č. 1	FS var. č. 2	FS var. č. 3	FS var. č. 1	FS var. č. 2
měření	158	164	172	11	8,5	8,5
simulace	164	173	176	18	13	12,5
rozdíl	3,8%	5,5%	2,3%	64%	53%	47%

Tabulka 2 Verifikace modelu

Z tabulky je patrné, že u hodnoty rezonanční rychlosti se liší výsledky simulace od naměřených údajů nejvýše o 5,5 procenta. U velikosti amplitudy kmitů vychází u simulace hodnoty přibližně o polovinu větší než hodnoty naměřené. Tento rozpor je způsoben neznámou hodnotou tlumení trolejového vedení, kdy bylo nutné použít hodnotu udávanou pro jiné trolejové vedení.

### 4.3. Simulace jízdy

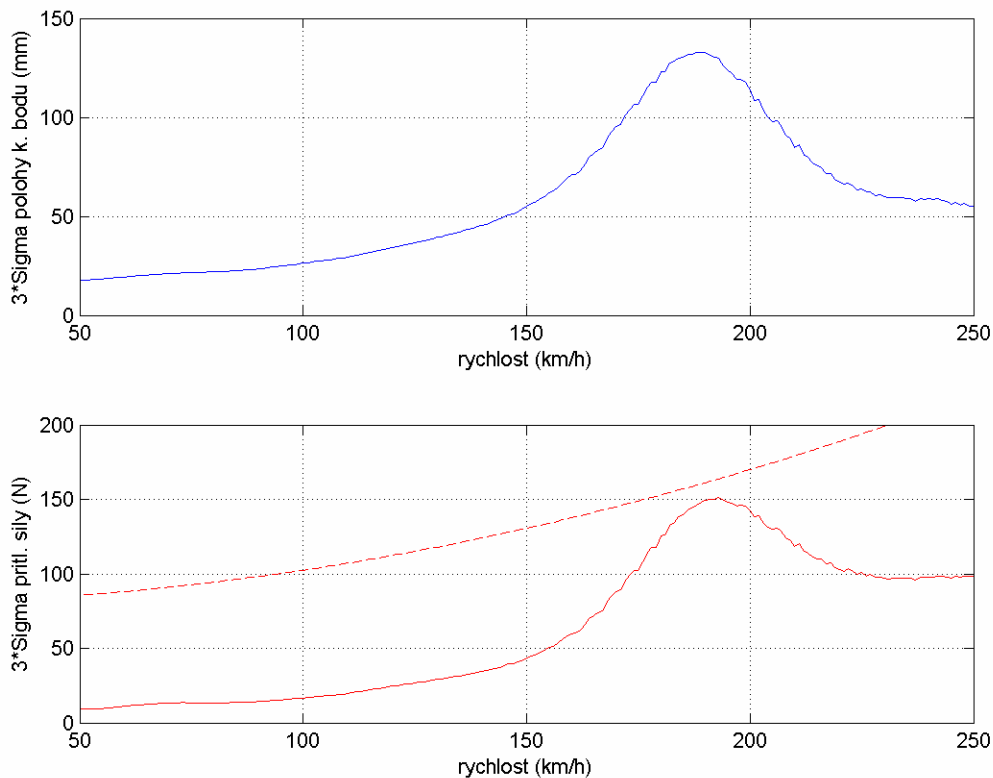
Vlastní simulace byly prováděny na základě údajů českých vedení sestavy „J“ s přidavným lanem. Základní graf hodnoty trojnásobku směrodatných odchylek polohy kontaktního bodu a přítláčné síly uvádí *Obrázek 5*.

Je z něj patrné, že k rezonančnímu stavu dochází při rychlosti 180 – 190 km/h. I v nejméně příznivém stavu však jsou podmínky normy [2] splněny, protože hodnota  $3 \cdot \sigma$  průběhu přítláčné síly nepřekračuje hodnotu  $F_M$  a je tedy splněna nerovnice

$$0 < F_{min} = F_M - 3 \cdot \sigma \quad (13)$$

Ize tedy předpokládat chod sběrače bez odskoků.

Výsledky simulací jízdy konstantní rychlostí jsou uvedeny v *Příloze 2* pro polohu kontaktního bodu a v *Příloze 3* pro velikost přítláčné síly. Pro srovnání jsou v *Příloze 1* uvedeny i dva grafy, změřené zařízením měřicího vozu TÚČD na trolejovém vedení sestavy „J“ při rychlosti 210 km/h v úseku Choceň - Pardubice. Z grafů vyplývají některé skutečnosti, týkající se chování trolejového vedení v závislosti na poměru okamžité rychlosti k rychlosti rezonanční. Nejvýznamnější jevy jsou popsány níže.



Obr. 5 Výsledky simulace pro různé rychlosti

- V oblasti nízkých rychlostí (40 km/h) sleduje výška kontaktního bodu statickou průhybovou křivku trolejového drátu, danou průběhem pružnosti trolejového vedení.
- Při rychlostech 100 a 120 km/h, u nichž kmitočet buzení není násobkem rezonančního kmitočtu soustavy, je chod sběrače klidný. Hodnota amplitudy polohy kontaktního bodu nepřesahuje 2,5 cm a kmitů přítláčné síly 25 N. Nepravidelnosti jsou způsobeny nepřesnou regulací trolejového drátu.
- Dalším zvyšováním rychlosti jízdy roste amplituda kmitů obou veličin, až při 180 a 200 km/h dosahuje maxima. Z grafu lze odečíst, že při rezonanční rychlosti dosahuje zdvih trolejového drátu v místě závěsu hodnoty cca 12 cm a velikost přítláčné síly je v rozmezí 100 – 260 N. Po překročení rezonanční rychlosti amplitudy opět klesají. Ačkoliv při těchto rychlostech již značně roste průměrná přítláčná síla daného sběrače (reprezentovaná v grafu vodorovnou čarou, 150 N při 180 km/h, více než 190 N při 220 km/h), lokální maxima přítláčné síly i při tomto růstu většinou nepřesahují hranici 300 N.
- Podobné hodnoty lze odečíst z grafů měřených při mírně nadrezonanční rychlosti 210 km/h. Přítláčná síla se pohybuje v rozmezí 110 až 280 N, střední přítláčná síla sběrače je 185 N. Zdvih trolejového drátu dosahuje 10 až 15 cm.
- Důležitým jevem, patrným jak z výsledků měření, tak simulace, jsou fázové posuvy průběhů při zvyšování rychlosti. Při podrezonančních rychlostech dosahuje zdvih trolejového drátu svého maxima uprostřed rozpětí tak, jak by odpovídalo statické průhybové křivce (viz graf pro rychlost 140 km/h). S postupným přibližováním rezonanční rychlosti se maxima zdvihu posouvají do místa závěsu stejně jako maxima okamžité přítláčné síly, jejíž průběh navíc dostává pilovitý tvar (velmi patrné pro rychlosti 200 a 220 km/h).

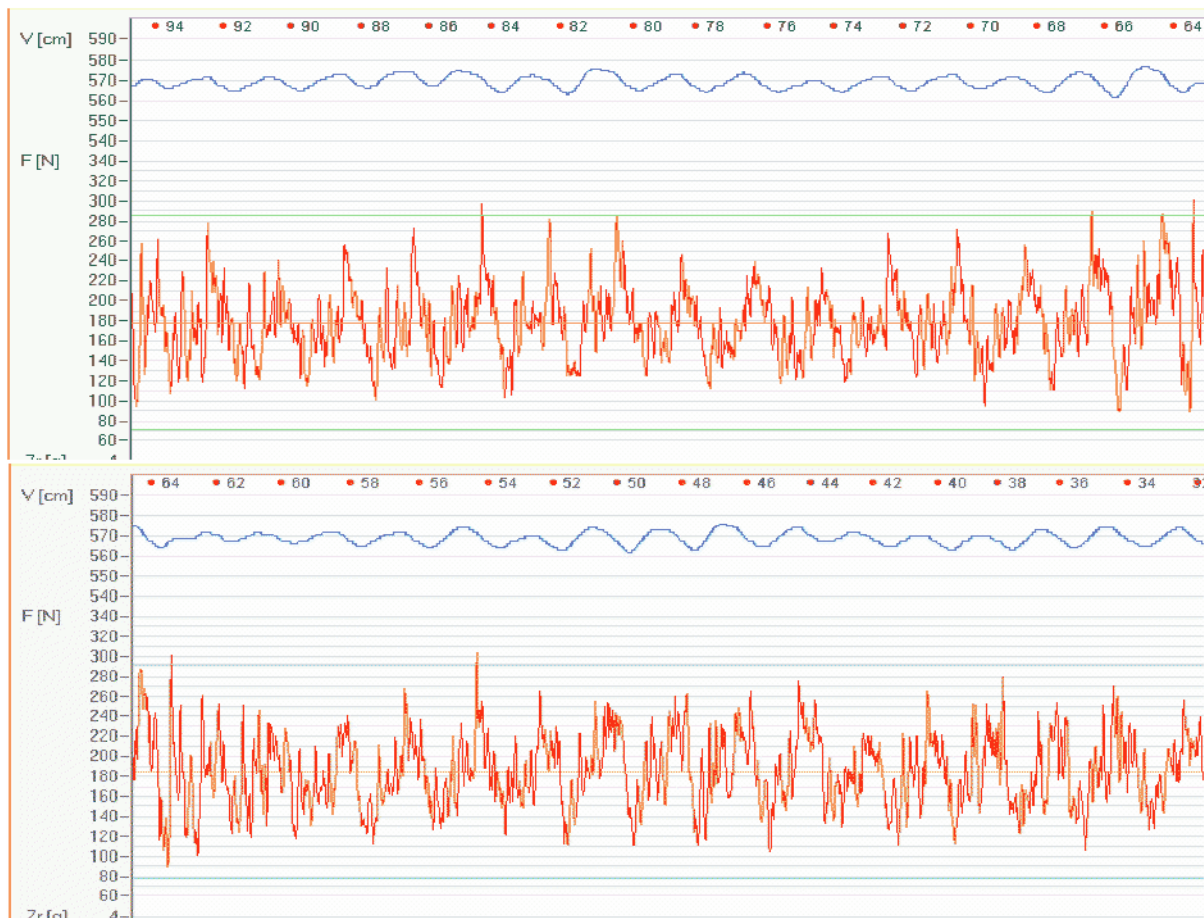
Oproti záznamům z měřicího vozu grafy vykazují jednu na první pohled patrnou odchylku – pro vyšší rychlosti postrádají typické nepravidelnosti ve formě velmi rychlých kmitů. Přibližně

to odpovídá stavu, kdy pro filtraci výsledků byla použita dolní propust o nižší kmitočtu, než je 20 Hz předepsaných v normě EN 50 317. Je to způsobeno tím, že v modelu byly zahrnuty pouze náhodné vlivy nepřesné regulace trolejového drátu. Nebyl zahrnut vliv nepravidelného turbulentního proudění vzduchu při vysoké rychlosti, náhodné pohyby skříňe vozidla ani dorazy sekundárního vypružení smykadla sběrače.

## 5. Závěr

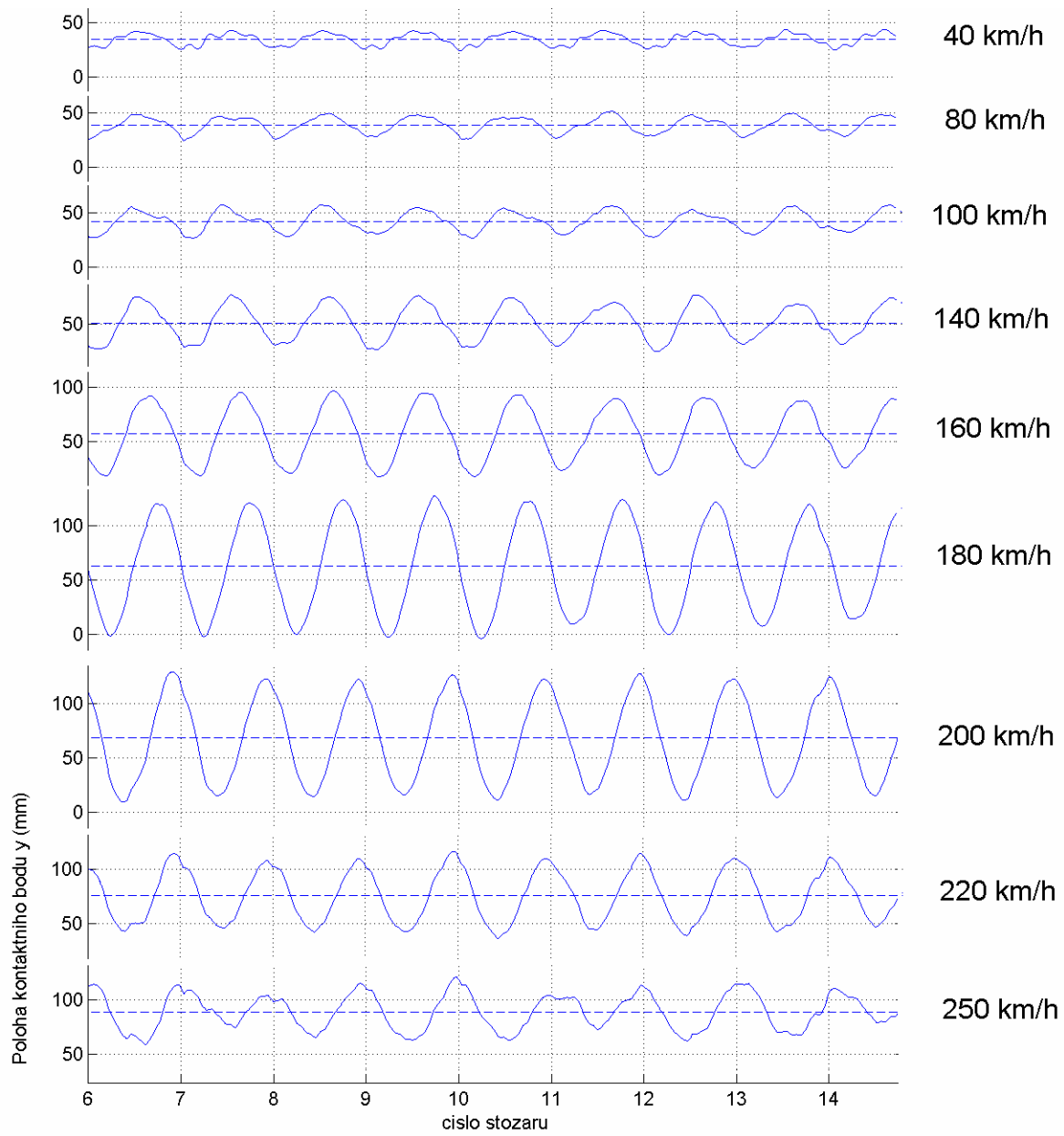
Počítačové simulace nabývají v poslední době zcela zásadního významu. Norma EN 50 367 simulace v mnoha případech doporučuje a dokonce i uvádí jako metodu rovnocennou měření. Dále byla vydána norma EN 50 318 *Ověřování simulace dynamické interakce mezi pantografovým sběračem a nadzemním trolejovým vedením*, která uvádí základní požadavky na modely a přesnost simulace. Dosažené výsledky prezentované v tomto příspěvku ukazují na použitelnost zvoleného řešení. Další práce by měly být zaměřeny na zdokonalení modelu doplněním některých vstupních parametrů požadovaných normou, které dosud nebyly v modelu trolejového vedení zohledněny. Úpravy by měly vést ke zvýšení přesnosti na požadovaných 20 procent. Nutnou podmínkou úspěšného používání simulací spolupráce trolejového vedení s vozidlovým sběračem v našich podmínkách je však realizace měření fyzikálních parametrů  $k_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $M_w$ ,  $M_{sb}$  u běžně používaných sběračů. Nebude tak již nutné používat údaje německé, italské a francouzské.

## 6. Přílohy

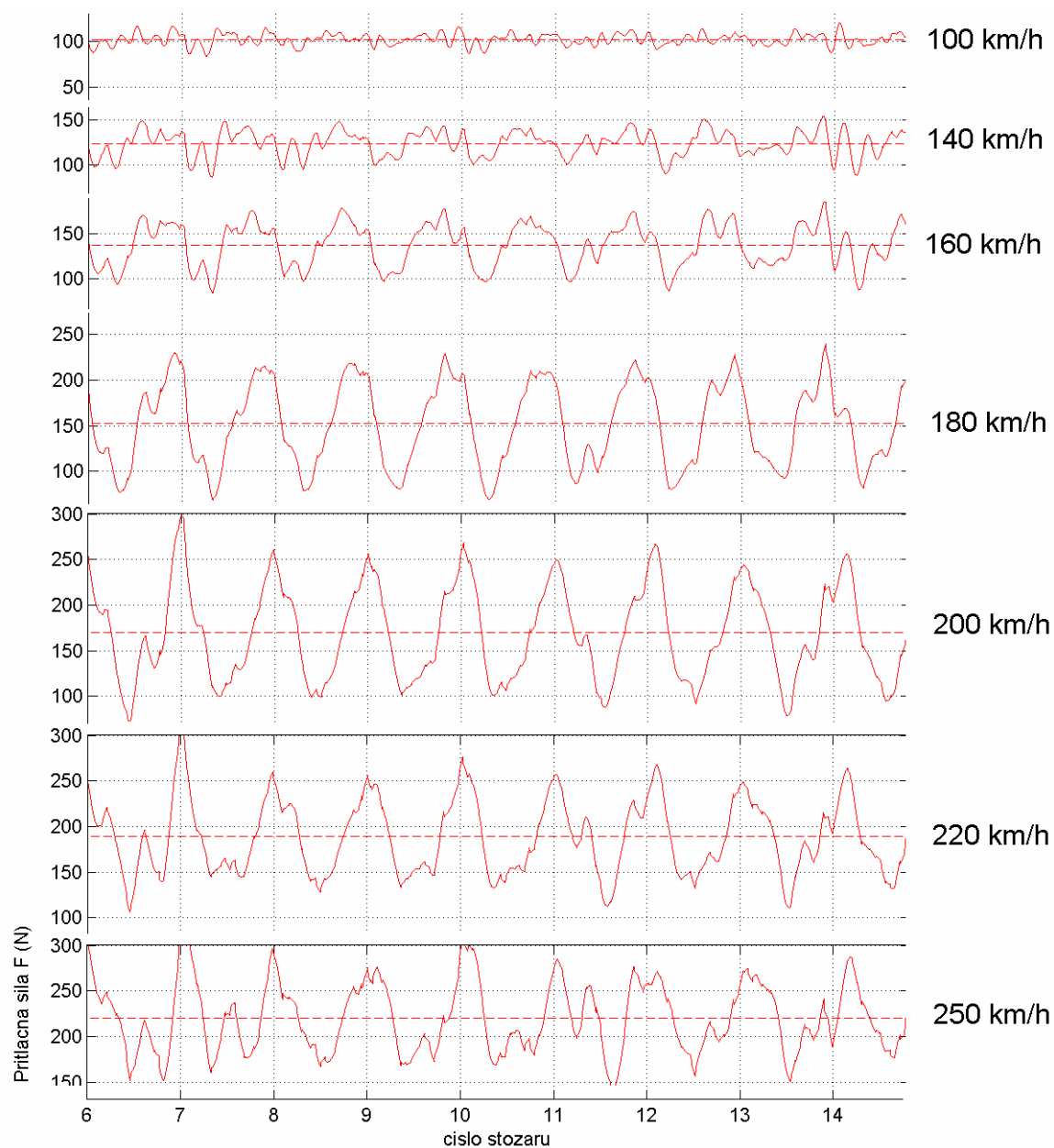


Příloha 1 Výsledky měření TV při rychlosti 210 km/h





*Příloha 2 Simulace polohy kontaktního bodu*



*Příloha 3 Simulace velikosti přítlačné síly*

## 7. Literatura

- [1] Ebeling, H. *Stromabnahme bei hohen Geschwindigkeiten – Probleme der Fahrleitungen und Stromabnehmer (v Elektrische Bahnen č. 2 a 3)*: EB, Berlin 1969.
- [2] *Norma EN 50 367*: CENELEC, Brusel 2006
- [3] *Frage A 84. Verhalten der Stromabnehmer und Fahrleitungen bei Geschwindigkeiten über 160 km/h (Nr. 1-11)*: ORE, Utrecht 1966 – 1970
- [4] *Firemní literatura firmy Balfour Beatty Rail, AG*
- [5] *Firemní literatura firmy Elektrizace Železnic Praha, a. s.*