




## Using a Kalman Filter for Estimating a Random Constant Použití Kalmanova filtru pro výpočet odhadu konstantní hodnoty

KUPCZAK, Marek

Ing,  Katedra ATR-352, VŠB-TU Ostrava, 17. listopadu, Ostrava - Poruba, 708 33,  
 marek.kupczak.fs@vsb.cz,  <http://www.352.vsb.cz>

**Abstrakt:** Tento příspěvek se zabývá popisem vytvořené aplikační úlohy, která je určena pro výpočet odhadu konstantní hodnoty z měřeného signálu, který je zatížen šumem měření. Jádrem vytvořené aplikační úlohy je použití adaptivního Kalmanova filtru. Velikost výběrového rozptylu šumu měření je použita jako adaptabilní parametr Kalmanova filtru. Tato aplikační úloha byla implementována v prostředí digitálních signálových procesorů (DSP), konkrétně byl použit 32-bitový ADSP-21065L DSP procesor, který umožňuje zpracovávat data ve formátu s plovoucí řádovou čárkou.

**Klíčová slova:** digitální signálový procesor, Kalmanův filtr, adaptivní filtrace

### 1 Úvod

V roce 1960 publikoval R. E. Kalman svou slavnou práci [Kalman, 1960] popisující rekurzivní řešení problému lineární filtrace diskretních dat. Kalmanův filtr je množina matematických rovnic, které poskytují výpočetně vysoce efektivní rekurzivní řešení metodou nejmenších čtverců. Tento filtr je vysoce výkonný v několika aspektech: pomáhá odhadovat minulé, současné a dokonce i budoucí stavy, a to i pro systémy, jejichž přesný matematický popis není znám.

### 2 Kalmanovy rovnice

Kalmanovy rovnice řeší problém nalezení optimálního odhadu stavu  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  lineárního diskretního stochastického systému, který lze popsat stavovými rovnicemi (1) a (2).

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k,k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2)$$

kde  $\mathbf{v}_k$  a  $\mathbf{w}_k$  jsou vzorkované náhodné posloupnosti s normálním rozdělením hustoty pravděpodobnosti a s charakterem bílého šumu. Nazývají se šum procesu a šum měření. Kalmanovy rovnice pro uvažovaný lineární diskretní stochastický systém (1) a (2) jsou následující.

$$\hat{\mathbf{x}}'_k = \mathbf{A}_{k,k-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_{k-1}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}'_k = \mathbf{A}_{k,k-1} \cdot \mathbf{P}'_{k-1} \cdot \mathbf{A}_{k,k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (4)$$

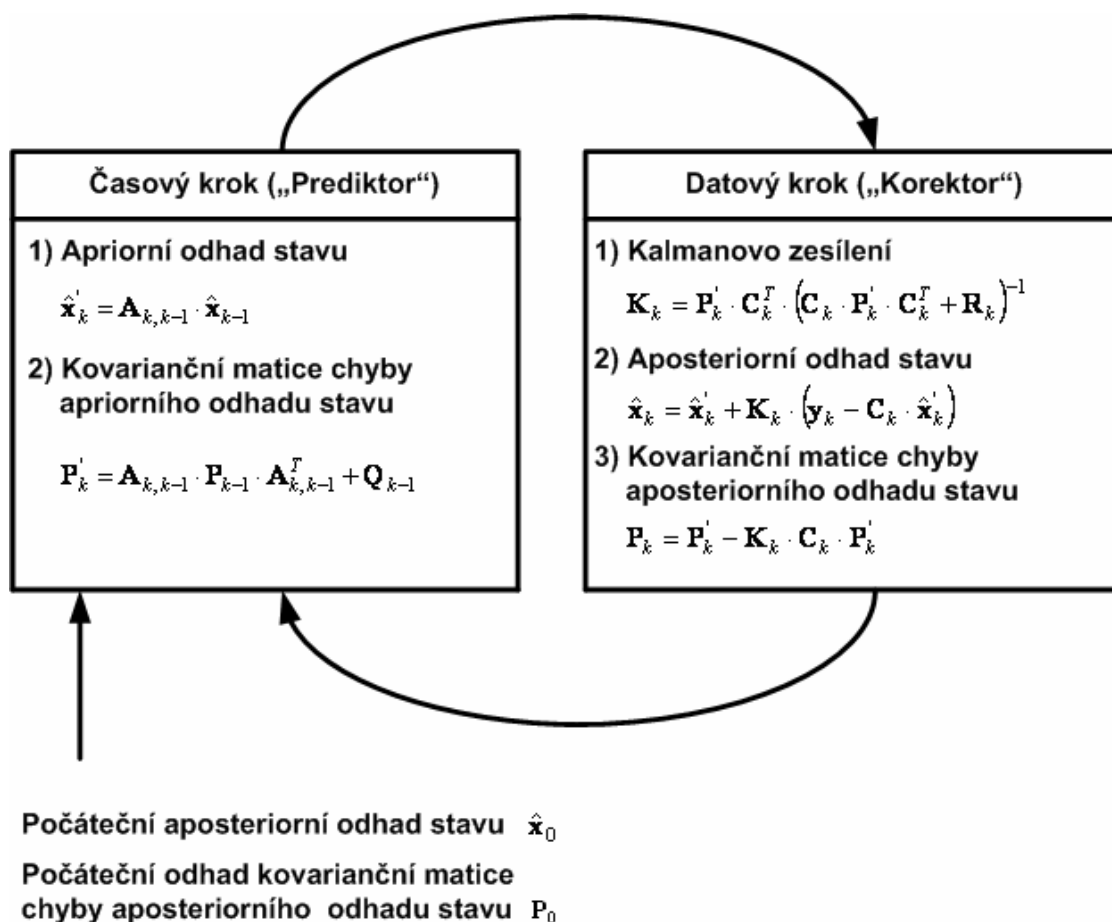
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{C}_k^T \cdot (\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}'_k + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}'_k), \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}'_k - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{P}'_k, \quad (7)$$

kde  $\hat{\mathbf{x}}_k'$  je apriorní odhad stavu,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  je aposteriorní odhad stavu,  $\mathbf{P}_k'$  je kovarianční matice chyb apriorního odhadu stavu,  $\mathbf{P}_k$  je kovarianční matice chyb aposteriorního odhadu stavu,  $\mathbf{K}_k$  je tzv. Kalmanovo zesílení,  $\mathbf{Q}$  je kovarianční matice šumu procesu a  $\mathbf{R}$  je kovarianční matice šumu měření.

Jak je vidět ze vztahů (3)-(7), Kalmanovy rovnice představují algoritmus, který generuje posloupnost lineárních odhadů stavu (apriorní a aposteriorní) a posloupnost kovariančních matic chyb těchto odhadů. Tento algoritmus je tvořen dvěmi podmnožinami. První podmnožinu tvoří rovnice (3) a (4). Jedná se o vztahy, pomocí nichž je možno určit apriorní odhad stavu  $\hat{\mathbf{x}}_k'$  v kroku měření  $k$  a k němu příslušnou kovarianční matici chyby tohoto apriorního odhadu stavu  $\mathbf{P}_k'$ . Souhrnně se tyto dvě rovnice označují jako tzv. časový nebo predikční krok algoritmu. Druhou podmnožinu tvoří vztahy (5)-(7). Jedná se o rovnice, pomocí kterých lze určit aposteriorní odhad stavu  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , velikost Kalmanova zesílení  $\mathbf{K}_k$  v kroku  $k$  a příslušnou kovarianční matici chyby tohoto aposteriorního odhadu stavu  $\mathbf{P}_k$ . Souhrnně se tyto tři rovnice označují jako tzv. datový nebo korekční krok algoritmu. Tento algoritmus je symbolicky naznačen na obr. 1.



Obrázek 1 – Grafické znázornění algoritmu Kalmanova filtru

### Význam Kalmanova zesílení

Kalmanovo zesílení  $\mathbf{K}_k$  (5) je v odborné literatuře [Welch a Bishop, 2006, Welling, 1986] odvozováno tak, aby minimalizovalo kovarianční matici chyby aposteriorního odhadu stavu  $\mathbf{P}_k$ . Vliv Kalmanova zesílení je následující. Jestliže se kovarianční matice šumu měření

$\mathbf{R}$  blíží k nule, pak Kalmanovo zesílení  $\mathbf{K}_k$  má větší vliv na hodnotu kovarianční matice chyby aposteriori odhadu stavu  $\mathbf{P}_k$ , neboť platí následující limita.

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{C}_k^{-1}, \quad (8)$$

Na druhou stranu, jestliže se kovarianční matice chyby apriorního odhadu stavu  $\mathbf{P}_k'$  blíží k nule, pak Kalmanovo zesílení  $\mathbf{K}_k$  má menší vliv, neboť platí následující limita.

$$\lim_{\mathbf{P}_k' \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{0}, \quad (9)$$

Jinými slovy lze význam Kalmanova zesílení  $\mathbf{K}_k$  popsat následovně. Jestliže se kovarianční matice šumu měření  $\mathbf{R}$  blíží k nule, pak aktuální měření  $\mathbf{y}_k$  je považováno za věrohodnější, zatímco predikované měření  $\mathbf{C}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k'$  je považováno za méně věrohodné. Na druhé straně, jestliže kovarianční matice chyby apriorního odhadu stavu  $\mathbf{P}_k'$  se blíží k nule, pak aktuální měření  $\mathbf{y}_k$  je považováno za méně věrohodné, zatímco predikované měření  $\mathbf{C}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}_k'$  je považováno za věrohodnější.

### Význam kovariančních matic šumu procesu a šumu měření

Při realizaci aplikace využívající Kalmanovy rovnice je nutné definovat konkrétní tvar kovarianční matice šumu procesu  $\mathbf{Q}$  a kovarianční matice šumu měření  $\mathbf{R}$ . Jelikož šum procesu  $\mathbf{v}_k$  i šum měření  $\mathbf{w}_k$  jsou chápány jako signály s normálním rozdělením hustoty pravděpodobnosti, jsou tyto kovarianční matice diagonální, jejichž prvky na hlavní diagonále mají velikost rovnu rozptylu těchto signálů.

Zatímco v praxi není problémem šum měření  $\mathbf{w}_k$  získat konkrétním měřením a z něj vypočítat odhad velikosti jeho rozptylu a tím určit kovarianční matice šumu měření  $\mathbf{R}$ , určit kovarianční matice šumu procesu  $\mathbf{Q}$  není tak snadné. Většinou se pomocí ní popisuje nejistota mezi skutečným procesem a procesem popsaným pomocí stavového modelu. Určení konkrétních tvarů těchto matic bývá v praxi většinou na předem zaznamenaných datech z měření. Ovšem mohou být i předmětem jejich nalezení během filtračního procesu.

## 3 Rekurentní výpočet parametrů rozdělení náhodných veličin

Adaptibilita vytvořené aplikace spočívá v průběžném počítání odhadu velikosti rozptylu šumu měření  $\mathbf{w}_k$  při samotném procesu filtrování, pomocí něhož je aktualizována kovarianční matice šumu měření  $\mathbf{R}$ . Díky tomu je tato aplikace použitelná i pro procesy zatížené nestacionárním šumem měření  $\mathbf{w}_k$ .

Číselné charakteristiky náhodných veličin se vypočítávají na základě znalosti typu rozdělení a velikosti jejich parametrů [Tůma, 1999]. Jak již bylo výše zmíněno, předpokládá se, že signál, který reprezentuje šum měření  $\mathbf{w}_k$ , má normální rozdělení hustoty pravděpodobnosti. Toto rozdělení má dva parametry, a to svou střední hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Parametry tohoto rozdělení jsou na rozdíl od rovnoměrného rozdělení přímo základní charakteristiky normálního rozdělení.

Často se velikosti těchto parametrů určují z naměřených dat. Vždy se jedná o konečný soubor realizací náhodné veličiny, který se nazývá náhodný výběr. Tento náhodný výběr, který má ústřední význam v matematické statistice, představuje posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , kde  $N$  je rozsah výběru.

Z náhodného výběru se vypočte výběrový průměr  $\bar{X}$  (10) a výběrový rozptyl  $m_2$  (11),

přičemž  $\sqrt{m_2}$  se nazývá výběrová směrodatná odchylka. Pro výhodnější limitní vlastnosti se používá také veličina  $S^2$  (12).

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i, \quad (10)$$

$$m_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (11)$$

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (12)$$

Výběrový průměr a výběrový rozptyl jsou náhodné veličiny, pro které lze spočítat také jejich číselné charakteristiky, například střední hodnotu a rozptyl. Nechť rozdělení veličin z výběru má střední hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Je žádoucí, aby střední hodnota výběrového průměru byla shodná se střední hodnotou veličin výběru, tj.  $E\{\bar{X}\} = \mu$ . Těto vlastnosti výběrové charakteristiky se říká nestranný (nebo nevychýlený) odhad příslušného parametru. Jestliže střední hodnota výběrového průměru není rovna střední hodnotě náhodné veličiny, pak se odhad označuje jako vychýlený nebo že není nestranný. Lze dokázat, že právě  $S^2$  je nestranný odhad rozptylu, tj.  $E\{S^2\} = \sigma^2$ . Další výhodnou vlastností je to, že rozptyl odhadu charakteristik se s rostoucím rozsahem výběru snižuje. Lze dokázat, že například platí  $D\{\bar{X}\} = \sigma^2/N$ .

Aplikace určené pro použití v prostředí digitálních signálových procesorů nemohou být založeny na vztazích jako jsou například (10)-(12). Zpracování číslicových signálů totiž v těchto systémech nelze provádět na naměřených datech. To by si vyžadovalo ukládat poměrně velký objem naměřených dat do paměti a také časovou prodlevu, která je dána především časem nutným pro jejich získání. Obecnou nevýhodou vztahů tohoto typu je nutnost mít k dispozici předem získaný záznam naměřeného signálu. Proto bylo přistoupeno k nalezení způsobu, jak počítat hodnotu výběrového průměru a výběrového rozptylu průběžně.

Nechť  $\bar{X}_{N-1}$  je výběrový průměr pro záznam obsahující  $N-1$  vzorků a  $\bar{X}_N$  je výběrový průměr pro záznam obsahující  $N$  vzorků.

$$\bar{X}_{N-1} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i \quad (13)$$

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \quad (14)$$

Rozdíl mezi výběrovým průměrem  $\bar{X}_{N-1}$  a výběrovým průměrem  $\bar{X}_N$ , který obsahuje o jeden vzorek delší záznam, nechť je označen  $\Delta_1$ . Tyto veličiny jsou navzájem svázány rovnicí (15).

$$\bar{X}_N = \bar{X}_{N-1} + \Delta_1 \quad (15)$$

Vztah pro určení tohoto rozdílu (16) lze určit následujícím postupem.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \bar{X}_N - \bar{X}_{N-1} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=N-1}^N X_i - \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^{N-1} X_i + X_N \right) - \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i = \\ &= \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \left[ (N-1) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i + (N-1) \cdot X_N - N \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i \right] = \\ &= \frac{1}{N} \cdot X_N - \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} X_i = \frac{1}{N} \cdot (X_N - \bar{X}_{N-1}) \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{N} \cdot (X_N - \bar{X}_{N-1}) \quad (16)$$

Dosazením (16) do (15) dostaneme vztah pro výpočet výběrového průměru pro záznam obsahující  $N$  vzorků (17) na základě znalosti předešlé hodnoty výběrového průměru, který obsahuje  $N-1$  vzorků, a spočítaného přírůstkového rozdílu. Výhodou je to, že není potřeba průběžně ukládat naměřená data.

$$\bar{X}_N = \bar{X}_{N-1} + \frac{1}{N} \cdot (X_N - \bar{X}_{N-1}) \quad (17)$$

Stejným způsobem lze najít vztah pro určení velikosti výběrového rozptylu  $m_{2,N}$  pro záznam obsahující  $N$  vzorků (18) na základě znalosti předešlé hodnoty výběrového rozptylu  $m_{2,N-1}$ , jenž obsahuje  $N-1$  vzorků, a spočítaného přírůstkového rozdílu. Výhodou tohoto vztahu je opět to, že není potřeba ukládat naměřená data. Odvození tohoto vztahu se opírá o následující postup. Nechť příslušný přírůstkový rozdíl, který je svázán s příslušnými výběrovými rozptyly  $m_{2,N}$  a  $m_{2,N-1}$  rovnicí X.18, je označen  $\Delta_2$ .

$$m_{2,N} = m_{2,N-1} + \Delta_2 \quad (18)$$

Vztah pro určení tohoto rozdílu (19) lze určit následujícím postupem.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (X_i - \bar{X}_{N-1})^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i^2 - 2X_i \bar{X}_N + \bar{X}_N^2) - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (X_i^2 - 2X_i \bar{X}_{N-1} + \bar{X}_{N-1}^2) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{2\bar{X}_N}{N} \sum_{i=1}^N X_i + \frac{\bar{X}_N^2}{N} N - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 + \frac{2\bar{X}_{N-1}}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i - \frac{\bar{X}_{N-1}^2}{N-1} (N-1) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 + X_N^2 \right) - 2\bar{X}_N + \bar{X}_N^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 + 2\bar{X}_{N-1} - \bar{X}_{N-1}^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 + \frac{X_N^2}{N} - \bar{X}_N^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 + \bar{X}_{N-1}^2 = \\ &= \frac{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 - N \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2}{N(N-1)} + \frac{X_N^2}{N} - \left[ \bar{X}_{N-1} + \frac{1}{N} (X_N - \bar{X}_{N-1}) \right]^2 + \bar{X}_{N-1}^2 = \\ &= \frac{1}{N} \left[ X_N^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 - 2\bar{X}_{N-1} (X_N - \bar{X}_{N-1}) - \frac{1}{N} (X_N - \bar{X}_{N-1})^2 \right] \\ \Delta_2 &= \frac{1}{N} \left[ X_N^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} X_i^2 - 2\bar{X}_{N-1} (X_N - \bar{X}_{N-1}) - \frac{1}{N} (X_N - \bar{X}_{N-1})^2 \right] \quad (19) \end{aligned}$$

## 4 Popis vytvořené aplikace

Vytvořená aplikace je určena pro odhad náhodné skalární konstanty, která například může reprezentovat úroveň napětí. Tato aplikace předpokládá použití lineárního diskretního stochastického systému, popsáno pomocí stavového modelu (20) a (21).

$$x_k = x_{k-1} + v_{k-1} \quad (20)$$

$$y_k = x_k + w_k \quad (21)$$

Jedná se o jednorozměrný systém, tzn. že matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{C}$  přejdou ve skaláry. Navíc nechť  $A = C = 1$ . Kalmanovy rovnice poté budou mít následující tvary.

### 1. predikční rovnice

$$\hat{x}'_k = \hat{x}'_{k-1} \quad (22)$$

$$P'_k = P'_{k-1} + Q_{k-1} \quad (23)$$

### 2. korekční rovnice

$$K_k = P'_k \cdot (P'_k + R_k)^{-1} \quad (24)$$

$$\hat{x}'_k = \hat{x}'_k + K_k \cdot (y_k - \hat{x}'_k) \quad (25)$$

$$P_k = P'_k - K_k \cdot P'_k \quad (26)$$

Předpokládejme velmi malou odchylku šumu procesu  $v$ , necht' kovarianční matice (respektive skalár) šumu procesu  $Q$  má velikost  $Q = 10^{-5}$  V (respektive  $Q = 10^{-1}$  V pro třetí prezentovaný příklad). Pomocí ní zavedeme určitou nejistotu v popisu reálného systému užitím stavového modelu (20) a (21).

Vytvořená aplikace demonstuje použití adaptivního Kalmanova filtru a to tak, že se mění velikost rozptylu šumu měření  $w$ , který ovlivňuje měření požadovaného signálu. Šum měření  $w$  je generován jako signál s charakterem bílého šumu a lze jej prezentovat pomocí kovarianční matice (respektive skalárem) šumu měření  $R$ .

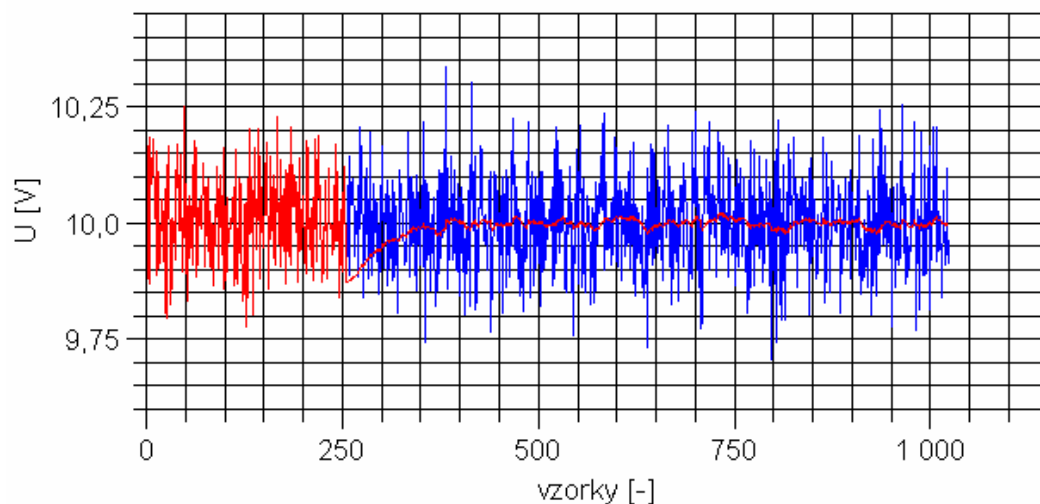
Ještě je nutné určit, popřípadě odhadnout velikost počátečního aposteriorního odhadu stavu  $\hat{x}_0$  a počáteční kovarianční matici (respektive skalár) tohoto aposteriorního odhadu  $P_0$ . Necht'  $\hat{x}_0 = 0$  a  $P_0 = 1$ .

Necht' skutečná hodnota měření je konstantní a o velikosti 10 V, která je zatížena šumem měření  $w$  o rozptylu postupně  $\sigma_w^2 \cong 0,1, 1, 10$  V. Necht' jeho počáteční hodnota je nulová, tj.  $\sigma_w^2 = R = 0$  V.

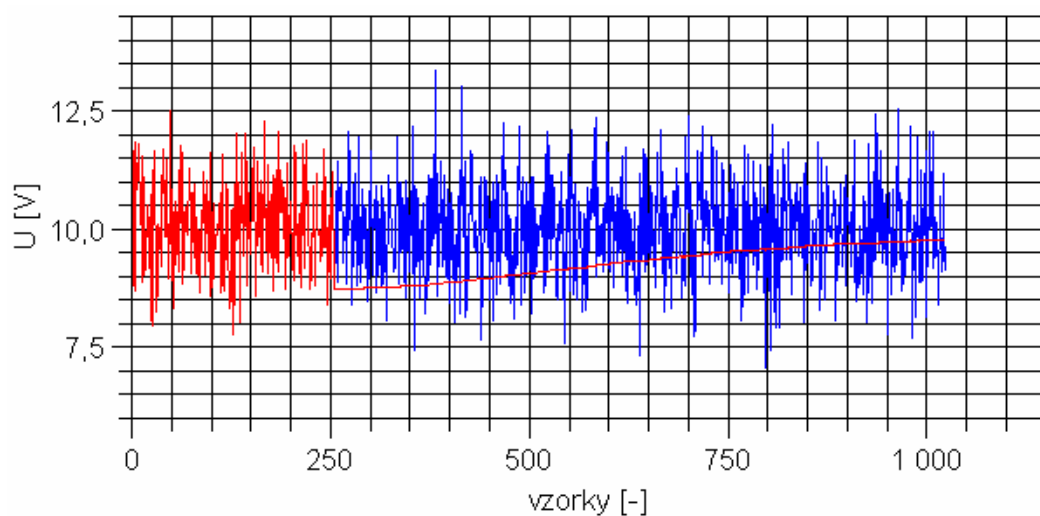
Úkolem vytvořené aplikace je odhadnout velikost konstantního napětí, přičemž jsou použity vztahy (15)-(19) pro výpočet velikosti výběrového průměru  $\bar{X}$  a výběrového rozptylu  $m_2$ , které se použijí jako adaptibilní parametr Kalmanova filtru (22)-(26). Vypočtená velikost výběrového rozptylu  $m_2$  se totiž použije jako parametr  $R$  ve vztahu (24) pro výpočet Kalmanova zesílení, tj.  $m_2 \rightarrow R$ . Délka záznamu pro výpočet  $\bar{X}$  a  $m_2$  je zvolena hodnota  $N = 256$ . Jak již bylo výše zmíněno, není potřeba ukládat těchto 256 změřených hodnot do datové paměti signálového procesoru.

## 5 Experimentální ověření

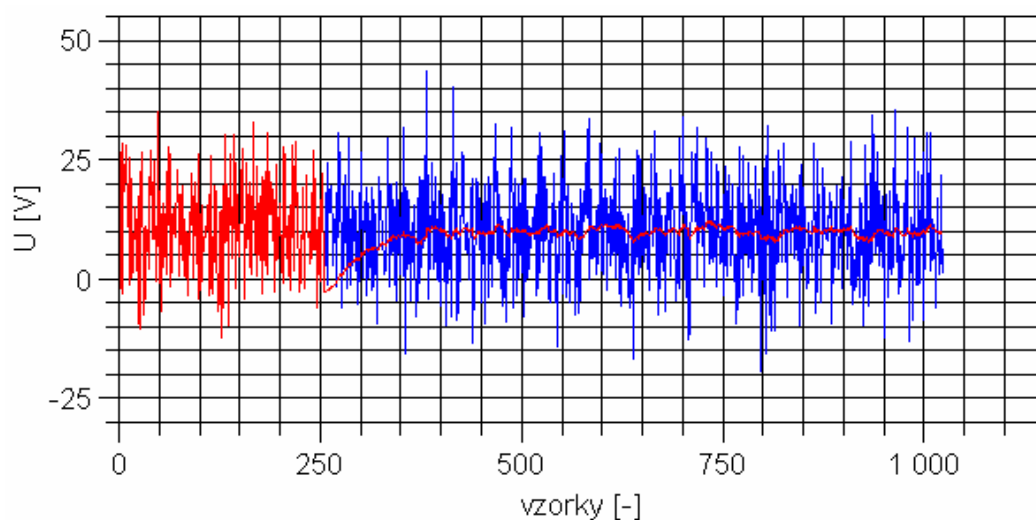
Na obr. 2-4 jsou zobrazeny výsledky užití adaptivního Kalmanova filtru, který je použit pro odhad velikosti náhodné konstantní hodnoty z měřeného signálu, který je zatížen šumem měření. Na obr. 2 má šum měření rozptyl o velikosti  $\sigma_w^2 \cong 0,1$  V, na obr. 3 rozptyl o velikosti  $\sigma_w^2 \cong 1$  V a konečně na obr. 4 rozptyl o velikosti  $\sigma_w^2 \cong 10$  V.



Obrázek 2 – Užití adaptivního Kalmanova filtru,  $\sigma_w^2 \cong 0,1 \text{ V}$



Obrázek 3 – Užití adaptivního Kalmanova filtru,  $\sigma_w^2 \cong 1 \text{ V}$



Obrázek 4 – Užití adaptivního Kalmanova filtru,  $\sigma_w^2 \cong 10 \text{ V}$

Modrou barvou je zobrazen původní měřený signál, červenou barvou filtrovaný signál. Na uvedených příkladech lze pozorovat, jak se mění vliv filtrování pomocí Kalmanova filtru. Porovnáním výsledků, zobrazených na obr. 2 a obr. 3, lze vypořadovat, že pro nižší hodnotu rozptylu šumu měření se filtr chová tak, že rychleji „důvěřuje“ měřenému signálu (viz obr. 2),

zatímco po zvětšení hodnoty rozptylu šumu měření desetkrát, filtr pomaleji „důvěřuje“ měřenému signálu (viz obr. 3).

Výsledek třetího procesu filtrování je kvalitativně podobný jako na obr. 2, avšak musela být změněna hodnota zvoleného rozptylu procesu z hodnoty  $\sigma_v^2 = 10^{-5}$  V na  $\sigma_v^2 = 10^{-1}$  V, neboť původně zvolená hodnota nezaručovala správnou funkčnost Kalmanova filtru.

Dále na obr. (2)-(4) jde vidět, že prvních 256 hodnot výstupů Kalmanova filtru je totožný s měřeným signálem. Je to dáno počátečním nastavením nulové velikosti rozptylu šumu měření. Aktualizovaná hodnota výběrového průměru a výběrového rozptylu je poskytována v každém 256. kroku, protože délka záznamu pro jejich výpočet je zvolena právě  $N = 256$ . Velikost daného zpoždění je minimální, jelikož například při nastavení hodinového kmitočtu codeku AD1819A, jenž je součástí vývojové desky ADSP-21065L, na hodnotu  $f_s = 48000$  Hz, ke sběru 256 vzorků dojde přibližně za 5 ms.

## 6 Závěr

Do prostředí signálového procesoru ADSP-21065L byla implementována aplikace, která dokáže provádět odhad velikosti náhodné konstantní hodnoty. Tato aplikace je založena na použití Kalmanových rovnic, jejichž jedna proměnná je během procesu filtrace průběžně aktualizována. Jedná se o proměnnou, která reprezentuje odhad velikosti rozptylu šumu měření. Rozptyl tohoto signálu je počítán použitím odvozených vztahů pro výpočet výběrového průměru a výběrového rozptylu, jejich výhodou je to, že k jejich výpočtu dochází průběžně, tím není potřeba uchovávat měřený signál v datové paměti procesoru.

## 7 Použitá literatura

- KALMAN, R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, 1960, č. 82, s. 35-45.  
Dostupné z www: <URL:http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Kalman1960.pdf>
- MAYBECK, P. S. 1979. *Stochastic models, estimation, and control*. USA : Academic Press, 1979. Dostupný z www: <URL:http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/maybeck\_ch1.pdf>
- MOVELLAN, J. R. 2006. *Tutorial on the Discrete Time Kalman Filter*. 2006. Dostupný z www: <URL:http://mplab.ucsd.edu/tutorials/pdfs/Kalman.pdf>
- TŮMA, J. 1999. *Složité systémy řízení I. díl: Regulace soustav s náhodnými poruchami*. Ostrava : skripta VŠB-TUO, 1999. 158 str. ISBN 80-7078-534-9.
- WELCH, G. & BISHOP, G. 2006. *An Introduction to the Kalman Filter*. 2006. Dostupný z www: <URL:http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman\_intro.pdf>
- WELLING, M. 1986. *The Kalman Filter*. 1986. Dostupný z www: <URL:http://www.stat.columbia.edu/~liam/teaching/neurostat-spr07/papers/hmm/KF-welling-notes.pdf>